الرياضيات

الأستاذ

محمد حميد

0770 710 5007

t.me/mohhmath



الفصل الرابع
التكامل

الاستاذ محمد حميد

التكامل

النظرية الاساسية للتكامل – الدالة المقابلة

اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a , b]$ فإنه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a , b]$ بحيث :

$$\acute{F}(x) = f(x) \ \forall\ x \in (a , b)$$

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

حيث تسمى F الدالة المقابلة للدالة f على الفترة $[a , b]$

ملاحظة : نشير الى ان $\boxed{[F(x)]_1^2 = F(2) - F(1)}$

مثال : اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0 , \frac{\pi}{2}]$ وإن الدالة المقابلة للدالة f هي :

$F(x) = sin\, x \quad , \quad F : \left[0 , \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow R$ فأوجد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = sin\, \frac{\pi}{2} - sin\, 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال : اذا كانت $f\ (x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1 , 5]$ بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد قيمة $\int_1^5 f(x)dx$.

الحل : $\int_1^5 f(x) = F(5) - F(1) = 3(5)^2 - 3(1)^2 = 75 - 3 = 72$

مثال : أثبت فيما اذا كانت $F(x) = x^3 + 2$ ، $F : [1 , 3] \rightarrow R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 3x^2$.

الحل : $\because$ $F(x) = x^3 + 2$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R لأنها كثيرة حدود

$\because$ F مستمرة على $[1 , 3]$ وقابلة للاشتقاق على $(1 , 3)$

$$\acute{F}(x) = 3x^2 = f(x) \qquad \forall\ x \in (1 , 3)$$

$\therefore$ F دالة مقابلة للدالة f على $[1 , 3]$

مثال : أثبت ان الدالة $F(x) = \frac{1}{2}\, sin\, 2x$ ، $F : R \rightarrow R$

هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = cos\, 2x$ ، $f : R \rightarrow R$ ثم جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2x\, dx$

الحل :

$$f(x) = cos\, 2x \quad , \quad f : R \rightarrow R$$

هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$$F(x) = \frac{1}{2}\, sin\, 2x$$

هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$$F'(x) = \frac{1}{2}\,(cos\, 2x)\, 2 = cos\, 2x = f\,(x) \qquad \forall\ x \in R$$

$\therefore$ F هي دالة مقابلة للدالة f

$$\because \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2x\,dx = [\frac{1}{2}\sin 2x\,]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin 2(0)$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 0 \;\; = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}$$

الجدول التالي يوضح العلاقة بين f والدالة المقابلة لها F

الدالة $f(x)$	الدالة المقابلة لها $F(x)$
a	ax
$x^n \;\; ,n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$ax^n \;\; ,n \neq -1$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1}$
$[f(x)]^n . f'(x) \;\; ,n \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$
$sin\,(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\,cos\,(ax+b)$
$cos\,(ax+b)$	$\frac{1}{a}\,sin\,(ax+b)$
$sec^2(ax+b)$	$\frac{1}{a}\,tan\,(ax+b)$
$csc^2(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\,cot\,(ax+b)$
$sec\,ax\,tan\,ax$	$\frac{1}{a}sec\,ax$
$csc\,ax\,cot\,ax$	$\frac{-1}{a}csc\,ax$

لذا نستنتج أن $\int f(x)dx = F(x) + c$ حيث أن c ثابت حقيقي

ملاحظة : اي نضيف الى الاس واحد ونقسم على الاس الجديد $\int_a^b x^n \;\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$

مثال : أوجد $\int_1^3 x^3\,dx$

الحل :

$$\int_1^3 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

مثال : أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x\,dx$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x\,dx = [\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sec\frac{\pi}{3} - \sec 0 = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$$

مثال : أوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\,dx$

الحل :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\,dx = [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -[\cot\frac{\pi}{2} - \cot\frac{\pi}{4}] = -[0 - 1] = 1$$

مثال : أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$

الحل :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال : أوجد $\int_1^2 x^2\,dx$

الحل :

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

خواص التكامل المحدد

١) اذا كانت f دالة مستمرة على $[a\,,b]$ وكانت $f(x) \geq 0\,, \forall\, x \in [a\,,b]$

فإن $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

$f(x) = x^2 \geq 0\,, \forall\, x \in [-1\,,2]$ لأن $\int_{-1}^2 x^2\,dx \geq 0$

$f(x) = 3 > 0\,, \forall\, x \in [-2\,,3]$ لأن $\int_{-2}^3 3\,dx > 0$

$f(x) = (x+1) > 0\,, \forall\, x \in [2\,,3]$ لأن $\int_2^3 (x+1)dx > 0$

٢) اذا كانت f دالة مستمرة على $[a\,,b]$ وكانت $f(x) \leq 0\,, \forall\, x \in [a\,,b]$

فإن $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

فمثلاً :

$f(x) < 0 \;, \quad \forall\, x \in [1\,,2] \quad,$ لأن $\int_1^2 (-2)dx < 0$

$f(x) < 0 \;, \quad \forall\, x \in [-2\,,-1] \;,$ لأن $\int_{-2}^{-1} x\,dx < 0$

٣) الثابت (العدد) يستخرج خارج التكامل

اذا f دالة مستمرة على $[a\,,b]$ وكان c عدد حقيقي ثابتا فإن :

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

مثال : اذا كان $\int_2^5 f(x)dx = 8$ فأوجد $\int_2^5 5\,f(x)dx$

الحل :

$$\int_2^5 5\,f(x)dx = 5\int_2^5 f(x)dx = 5\times 8 = 40$$

٤) اذا كانت دالتان $f_1\,, f_2$ مستمرتين على الفترة $[a\,,b]$

$$\int_a^b (f_1 \mp f_2) = \int_a^b f_1 \mp \int_a^b f_2$$

ويمكننا تعميم هذه الخاصية على مجموع اي عدد محدد من الدوال المستمرة على فترة $[a\,,b]$

مثال : اذا كانت $\int_1^3 f_2(x)dx = 17 \quad , \quad \int_1^3 f_1(x)dx = 15$ فأوجد كلا من :

$$\int_1^3 (f_1(x) + f_2(x))dx \;, \quad \int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))dx$$

الحل :

$$\int_1^3 (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_1^3 f_1(x)dx + \int_1^3 f_2(x)dx = 15 + 17 = 32$$

$$\int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))dx = \int_1^3 f_1(x)dx - \int_1^3 f_2(x)dx = 15 - 17 = -2$$

مثال : اذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ فأوجد $\int_1^2 f(x)dx$

الحل :

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (3x^2 + 2x)\,dx = \int_1^2 3x^2\,dx + \int_1^3 2x\,dx$$

$$\left[\frac{3x^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{2x^2}{2}\right]_1^2 = [x^3]_1^2 + [x^2]_1^2 = [8-1] + [4-1] = 7 + 3 = 10$$

٥) اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a\,,b]$ وكانت $c\ \in (a\,,b)$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال : اذا كانت $\int_3^7 f(x)dx = 8$, $\int_1^3 f(x)dx = 5$ فأوجد $\int_1^7 f(x)dx$

الحل :

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx = 5 + 8 = 13$$

مثال : لتكن $f(x) = |x|$ أوجد $\int_{-3}^4 f(x)\,dx$

الحل : f دالة مستمرة على $[-3\,,4]$ ولها قاعدتان هما :

$$f(x) = \begin{cases} x & \forall\, x \geq 0 \\ -x & \forall x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^4 f(x)dx = \int_{-3}^0 (-x)\,dx + \int_0^4 x\,dx = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \left[0 - \left(\frac{-9}{2}\right)\right] + \left[\frac{16}{2} - 0\right] = \frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2}$$

مثال : اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \forall\, x \geq 1 \\ 3 & \forall x < 1 \end{cases}$ فأوجد $\int_0^5 f(x)dx$

الحل : الدالة f مستمرة على الفترة $[0\,,5]$ وذلك لأنها مستمرة عند $x = 1$ لأن

1) $f(1) = 2\,(1) + 1 = 3$ معرفة

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} (2x+1) = 3 = L_1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} 3 = 3 = L_2 \end{cases}$

$\therefore\ L_1 = L_2$ الغاية موجودة

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$ موجودة $\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3$

$\therefore$ الدالة f مستمرة $\{x : x > 1\}\,, \{x : x < 1\}$ فتكون الدالة f مستمرة على الفترة $[0\,,5]$

$$\therefore \int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)\,dx = \int_0^1 3\,dx + \int_1^5 (2x+1)\,dx$$

$$= [3x]_0^1 + [x^2 + x]_1^5 = [3 - 0] + [(25+5) - (2)] = 3 + 28 = 31$$

٦) اذا كان

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$



مثال : أوجد $\int_3^3 x\,dx$

الحل : $\int_3^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$ أو باستخدام القاعدة مباشرة $\int_3^3 x\,dx = 0$

مثال : أوجد $\int_3^2 3x^2\,dx$

الحل :

$$\int_3^2 3x^2\,dx = -\int_2^3 3x^2\,dx = -[x^3]_2^3 = -[27-8] = -27+8 = -19$$

ملاحظة :

اذا كانت $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x<1 \\ 4x-2 & x \geq 1 \end{cases}$ جد إن أمكن $\int_0^2 f(x)dx$

في هذا المثال تكون الاستمرارية متحققة لأنها معرفة عند $x=1$ بعد ان نعوض بالدالة الثانية $(4x-2)$.

اذا كانت $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \leq 1 \\ 4x-2 & x > 1 \end{cases}$ جد إن أمكن $\int_0^2 f(x)dx$

في هذا المثال تكون الاستمرارية غير متحققة لأنها غير معرفة عند $x=1$ بعد ان نعوض بالدالة الأولى $(\frac{x^2-1}{x-1})$.

ملاحظة : اذا كان الحد الفاصل هو أحد حدي التكامل الأعلى أو الادنى ففيها وجهان :

١- اذا كانت جميع العناصر الواقعة بين حدي التكامل تقع ضمن أحد الجزئين بما فيها الحد الفاصل فنثبت الاستمراية على ذلك الجزء وعدم الاهتمام بالجزء الآخر .

٢- اذا كانت جميع العناصر الواقعة بين حدي التكامل تقع ضمن أحد الجزئين وكان الحد الفاصل تقع ضمن الجزء الآخر فيجب اثبات الاستمراية عند $x<a$ أو $x>a$ حسب طبيعة الدالة .

مثال : اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x^2-3 & x<1 \\ 4x+3 & x \geq 1 \end{cases}$ جد إن أمكن

1) $\int_1^5 f(x)dx$

الحل : عندما $x \geq 1$ الدالة تكون مستمرة لأنها كثيرة حدود

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^5 (4x+3)dx = [2x^2+3x]_1^5 = [50+15]-[2+3] = 60$$

2) $\int_{-3}^1 f(x)dx$

الحل : نثبت الاستمرارية

1- $f(1) = 4+3 = 7$

2- $\lim_{x\to1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to1^+}(4+3) = 7 = L_1 \\ \lim_{x\to1^-}(2-3) = -1 = L_2 \end{cases}$

$L_1 \neq L_2$ الدالة غير مستمرة ولا يمكن اجراء التكامل

مثال : اذا كان $\int_{-3}^1 f(x)dx = -1$

$f(x) = \begin{cases} 6-x & 2 \leq x \leq 4 \\ ax^2+b & -3 \leq x < 2 \end{cases}$ جد قيمتي $a, b \in R$

الحل : بما ان التكامل موجود فإن الدالة مستمرة عند الحد الفاصل وهو العدد (2) اي ان الغاية من اليمين تساوي الغاية من اليسار .

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^+} 6-2 & = 4 = L_1 \\ \lim_{x\to 2^-} 4a+b & = L_2 \end{cases} \Rightarrow L_1 = L_2$$

$4a + b = 4 \Rightarrow 4a = 4 - b \ldots\ldots\ldots (1)$

$$\int_{-3}^{1} f(x)dx = -1 \Rightarrow \int_{-3}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx = -1$$

$$\int_{-3}^{2} (ax^2 + b)dx + \int_{2}^{4} (6-x)\, dx = -1 \Rightarrow \left[\frac{ax^3}{3} + bx\right]_{-3}^{2} + \left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_{2}^{4} = -1$$

$$\left[\left(\frac{8a}{3} + 2b\right) - (-9a - 3b)\right] + [(24-8) - (12-2)] = -1$$

$\frac{8a}{3} + 2b + 9a + 3b = -7 \ ] \times 3$

$8a + 6b + 27a + 9b = -21 \Rightarrow 35a + 15b = -21 \ldots\ldots\ldots (2)$

$35a + 15(4 - 4a) = -21 \quad \Rightarrow 35a + 60 - 60a = -21 \Rightarrow -25a = -21 - 60$

$-25a = -81 \Rightarrow a = \frac{-81}{-25} = \frac{81}{25}$ نعوض في (١)

$b = 4 - \frac{324}{25} = \frac{-224}{25}$

مثال : لتكن $f(x) = |x-2|$ أوجد $\int_0^4 f(x)dx$

الحل :

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

1) $f(2) = |2-2| = 0$

2) $\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2^+} (x-2) & = 0 = L_1 \\ \lim_{x\to 2^-} -(x-2) = 0 = L_2 \end{cases}$

$L_1 = L_2$ الغاية موجودة

3) $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 0$

$\therefore$ الدالة f مستمرة على كل من $\{x: x < 2\}, \{x: x > 2\}$ فتكون الدالة f مستمرة على الفترة $[0, 4]$

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$$

$$= \int_0^2 (-x+2)dx + \int_2^4 (x-2)dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2} + 2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4$$

$$= \left[\frac{-4}{2} + 4\right] - [0] + \left[\frac{16}{2} - 8\right] - \left[\frac{4}{2} - 4\right]$$

$$= [-2 + 4] + [2] = 4$$

مثال : اذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ x + 2 & x < 2 \end{cases}$ أوجد $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

الحل : الدالة مستمرة في R لأنها مستمرة عند $x = 2$

1) $f(2) = 4$

2) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4 = L_1 \\ \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4 = L_2 \end{cases}$

الغاية موجودة $L_1 = L_2$

3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4$

∴ الدالة مستمرة في R عند $x = 2$

∵ الفترة $[-1, 1]$ تنتمي الى الفترة $(x < 2)$ فيكون التكامل $\boxed{f(x) = x + 2}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (x + 2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{2} + 2\right] - \left[\frac{1}{2} - 2\right] = 4$$

مثال : اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x & x \geq 1 \\ 6x - 1 & x < 1 \end{cases}$ أوجد $\int_{-2}^{3} f(x)dx$

الحل : الدالة f مستمرة على الفترة $[-2, 3]$ لأنها مستمرة عند $x = 1$ لأن

1) $f(1) = 3(1)^2 + 2(1) = 5$ معرفة

2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} 3x^2 + 2x = 5 = L_1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} 6x - 1 = 5 = L_2 \end{cases}$

الغاية موجودة $L_1 = L_2$

3) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 5$

∴ الدالة f مستمرة على كل $\{x: x < 1\}, \{x: x > 1\}$

∵ الدالة f مستمرة على كل $[-2, 3]$

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{1} (6x - 1)dx + \int_{1}^{3} (3x^2 + 2x)\, dx$$

$$= [3x^2 - x]_{-2}^{1} + [x^3 + x^2]_1^3 = [2 - 14] + [36 - 2] = -12 + 34 = 22$$

حل تمارين (4 – 1)

س1 : أحسب كلا من التكاملات الاتية :

a) $\int_{-2}^{2}(3x-2)dx = \left[\frac{3x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{2}$

$$= \left[\frac{3(2)^2}{2}-2(2)\right]-\left[\frac{3(-2)^2}{2}-2(-2)\right]$$

$$= [6-4]-[6+4] = 2-10 = -8$$

b) $\int_{1}^{2}(x^{-2}+2x+1)dx = [\frac{x^{-1}}{-1}+x^2+x]_1^2$

$$= \left[\frac{-1}{2}+(2)^2+2\right]-\left[\frac{-1}{1}+(1)^2+1\right]$$

$$= \left[\frac{-1}{2}+6\right]-[-1+1+1] = \left[\frac{-1}{2}+6\right]-[1] = \frac{9}{2}$$

c) $\int_{1}^{3}(x^4+4x)dx = [\frac{x^5}{5}+2x^2]_1^3$

$$= \left[\frac{(3)^5}{5}+2(3)^2\right]-\left[\frac{1}{5}+2(1)^2\right]$$

$$= \left[\frac{243}{5}+18\right]-\left[\frac{1}{5}+2\right] = \frac{242}{5}+16 = \frac{322}{5}$$

d) $\int_{0}^{2}|x-1|dx$

$$\because |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

$$\int_0^2|x-1|dx = \int_0^1(-x+1)dx+\int_1^2(x-1)dx$$

$$= [\frac{-x^2}{2}+x]_0^1+[\frac{x^2}{2}-x]_1^2 = \left[\frac{-1}{2}+1\right]-[0]+\left[\frac{4}{2}-2\right]-\left[\frac{1}{2}-1\right]$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(x+\cos x)dx = \left[\frac{x^2}{2}+\sin x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \left[\frac{(0)^2}{2}+\sin 0\right]-\left[\frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$= [0]-\left[\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right] = -\left[\frac{\pi^2}{8}-1\right] = -\frac{\pi^2}{8}+1$$

ملاحظة : $\sin(-x) = -\sin x$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

f) $\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$

$$= -\int_2^3 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = -\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\,dx$$

$$= -\int_2^3 (x^2+x+1)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3$$

$$= -\left[\left[\frac{(3)^3}{3}+\frac{(3)^2}{2}+3\right]-\left[\frac{(2)^3}{3}+\frac{(2)^2}{2}+2\right]\right] = -\left[\frac{27}{3}+\frac{9}{2}+3\right]-\left[\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2\right]$$

$$= -\left(\frac{54+27+18-16-12-12}{6}\right) = -\frac{59}{6}$$

g) $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx \;=\; \int_1^3 \frac{2x^3}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}\,dx \;=\; \int_1^3 2x-4+5x^{-2}\,dx$

$$= \left[x^2-4x+\frac{5x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = \left[x^2-4x-\frac{5}{x}\right]_1^3$$

$$= \left[9-12-\frac{5}{3}\right]-[1-4-5] = \left[-3-\frac{5}{3}\right]-8$$

$$= -\frac{14}{3}+8 = \frac{-14+24}{3} = \frac{10}{3}$$

س2 : أثبت أن $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث $F:\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\to R$ حيث $F(x)=sinx+x$
$f(x)=1+cosx$ حيث $f:\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\to R$ ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx$.

الحل : لكي نثبت أن $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$$F(x) = sinx + x$$

$$\acute{F}(x) = cosx + 1$$

$$\acute{F}(x) = cosx + 1 = f(x)$$

∴ الدالة $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx = F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F(0) = sin\,\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}-[sin\,0-0] = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{6} = \frac{3+\pi}{6}$$

س3 : أوجد كلاً من التكاملات الاتية :

a) $\int_1^4 (x-2)(x+1)^2 dx \;=\; \int_1^4 (x-2)(x^2+2x+1)\,dx$

$$= \int_1^4 (x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2)\,dx = \int_1^4 (x^3-3x-2)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^4 = \left[\frac{4^4}{4}-\frac{3}{2}(16)-8\right]-\left[\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-2\right]$$

$$= [64 - 24 - 8] - \left[\frac{1-6-8}{4}\right] = \left[32 + \frac{13}{4}\right] = \frac{128+13}{4} = \frac{141}{4}$$

b) $\int_{-1}^{1} |x+1| dx$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$$ خارج الفترة

لذا في هذه الحالة نأخذ الجزء الموجب فقط .

$$\int_{-1}^{1} |x+1| dx = \int_{-1}^{1} (x+1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{2} + 1\right] - \left[\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

c) $\int_{2}^{3} \frac{x^4-1}{x-1}\, dx$

$$= \int_{2}^{3} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}\, dx = \int_{2}^{3} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}\, dx$$

$$= \int_{2}^{3} (x+1)(x^2+1)\, dx = \int_{2}^{3} (x^3 + x + x^2 + 1)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x\right]_2^3 = \left[\frac{3^4}{4} + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3} + 3\right] - \left[\frac{16}{4} + \frac{4}{2} + \frac{8}{3} + 2\right]$$

$$= \left[\frac{81}{4} + \frac{9}{2} + 12\right] - \left[8 + \frac{8}{3}\right] = \frac{81}{4} + \frac{9}{2} + 12 - 8 - \frac{8}{3} = \frac{81}{4} + \frac{9}{2} + 4 - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{243 + 54 + 48 - 32}{12} = \frac{313}{12}$$

d) $\int_0^1 \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2\, dx = \int_0^1 \sqrt{x}(x + 4\sqrt{x} + 4) dx$

$$= \int_0^1 (x\sqrt{x} + 4x + 4\sqrt{x}) dx = \int_0^1 \left(x(x)^{\frac{1}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left((x)^{\frac{3}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{4x^2}{2} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3}\right] - [0] = \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}$$

س4 : اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x & \forall x \geq 3 \\ 6 & \forall x < 3 \end{cases}$ جد $\int_1^4 f(x) dx$

الحل : نبرهن أن الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[1 , 4]$

1) $f(3) = 2(3) = 6$ الدالة معرفة

2) $\lim_{x\to3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to3^+} 2x = 6 = L_1 \\ \lim_{x\to3^-} 6 = 6 = L_2 \end{cases}$

الغاية موجودة $L_1 = L_2$

3) $\lim_{x\to3} f(x) = f(x) = 6$ ∴ الدالة مستمرة

$$\int_1^4 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = \int_1^3 6\,dx + \int_3^4 2x\,dx$$

$$= [6x]_1^3 + [x^2]_3^4 = [18-6] + [16-9] = 12 + 7 = 19$$

س5 : اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \forall x \geq 0 \\ 2x & \forall x < 0 \end{cases}$ فأوجد $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ وزاري ٢٠١٤ / د١

الحل : نبرهن أن الدالة مستمرة على الفترة $[-1\,, 3]$

1) $f(0) = 3(0)^2 = 0$

2) $\lim_{x\to0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to0^+} 3x^2 = 3(0)^2 = 0 = L_1 \\ \lim_{x\to3^-} 2x = 2(0) = 0 = L_2 \end{cases}$

الغاية موجودة $L_1 = L_2$

3) $\lim_{x\to0} f(x) = f(0) = 0$

$$\int_{-1}^3 f(x) = \int_{-1}^0 2x + \int_0^3 3x^2 = [x^2]_{-1}^0 + [x^3]_0^3 = [0-1] + [27-0] = -1 + 27 = 26$$

واجبات

١) اذا كان $\int_0^b 3x\sqrt{x^2+16}\,dx = 61$ جد قيمة b الجواب (±3)

٢) اذا كان $\int_0^3 h(x+1)^{h-1}\,dx = 15$ جد قيمة h الجواب (2)

٣) اذا كان $\int_0^b (2cos^2x - 1)\,dx = \frac{1}{4}$ جد قيمة b الجواب $(\frac{\pi}{12}\,,\,\frac{5\pi}{12})$

٤) اذا كان $\int_a^{16} \frac{\sqrt{5-\sqrt{x}}}{\sqrt{27x}}\,dx = \frac{28}{9\sqrt{3}}$ جد قيمة a

---

التكامل غير المحدد

اذا كانت للدالة f المستمرة على $[a\,,b]$ دالة مقابلة F فإنه يوجد عدد لا نهائي من الدوال المقابلة للدالة f كل منها

يساوي $F + C$ حيث C يمثل عدد ثابت والفرق بين اكثر من اثنين منها يساوي عدد ثابت .

- تسمى مجموعة الدوال المقابلة $F + C$ بالتكامل غير المحدد للدالة f المستمرة على الفترة $[a , b]$ ويرمز لها بالرمز $\int f(x)dx$ اذا كان رمز المتغير x .
- يصطلح على كتابة التكامل غير المحدد على صورة $\int f(x)dx = F(x) + C \quad , \quad C \in R$
- عملية التكامل غير المحدد هو العملية المعاكسة لعملية التفاضل أي أحداهما تنهي دور الأخرى .

مثال : أوجد تكامل الدوال الاتية :

الحل :

$$(a) \int (3x^2 + 2x + 1)\, dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x + c = x^3 + x^2 + x + c$$

$$(b) \int (cosx + x^{-2})dx = sinx + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \sin x - x^{-1} + c == \sin x - \frac{1}{x} + c$$

$$(c) \int (csc3x\, cot3x\,)dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{(3)}_{\text{مشتقة الزاوية}} (csc3x\, cot3x\,)dx = \frac{-\,csc3x}{3} + c$$

$$(d) \int (\sin ax + sec^2 3x)dx = \int \frac{1}{a} \sin ax \underbrace{(a)}_{\text{مشتقة الزاوية}} dx + \int \frac{1}{3} sec^2 3x \,.\, \underbrace{(3)}_{\text{مشتقة الزاوية}} dx$$

$$= \frac{-\cos ax}{a} + \frac{\tan 3x}{3} + c$$

$$(e) \int (x + \sec x \tan x)dx = \frac{x^2}{2} + \sec x + c$$

$$(f) \int \sin(2x+4)\, dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+4) \underbrace{(2)}_{\text{مشتقة الزاوية}} dx = \frac{-1}{2} cos(2x+4) + c$$

نلاحظ أن كل قوس مرفوع الى اس يجب اتباع ما يأتي :

أ) نرتب حدود القوس .

ب) يجب ان تكون مشتقة داخل القوس موجودة .

ج) عند التكامل نقوم بحذف المشتقة .

مثال : جد التكامل $\int (x^2+3)^2\, (2x)\; dx$

الحل : $f(x) = x^2 + 3$ ، $\acute{f}(x) = 2x$ اي ان $\int [f(x)]^2\; \acute{f}(x)\, dx$

$\because$ المشتقة متوفرة اذن نكامل بصورة مباشرة $\quad \int (x^2+3)^2\, (2x)\; dx = \frac{[x^2+3]^3}{3} + c$

ملاحظة : $\int \cos x\, dx = sinx + c \quad , \quad \int \sin x\, dx = -cosx + c$

مثال : جد التكامل $\int (3x^2+8x+5)^6\,(3x+4)\;dx$

الحل :

$$= \int (3x^2+8x+5)^6 \underbrace{(3x+4)}_{\text{نضرب } \times 2}\;dx = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{قسمنا على } 2} \int (3x^2+8x+5)^6 \underbrace{(6x+8)}_{\text{المشتقة}}\;dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(3x^2+8x+5)^7}{7} + c = \frac{1}{14}\,(3x^2+8x+5)^7 + c$$

مثال : جد التكامل لكل مما يأتي :

a) $\int \sin^4 x \cos x\, dx = \frac{\sin^5 x}{5} + c$ $\qquad \sin x \xrightarrow{\text{مشتقتها}} \cos x$

b) $\int \tan^6 x \sec^2 x\, dx = \frac{\tan^7 x}{7} + c$ $\qquad \tan x \xrightarrow{\text{مشتقتها}} \sec^2 x$

مثال : جد التكامل $\int x\sqrt{x^2+2}\;dx$

الحل :

$$\int x\sqrt{x^2+2}\;dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\;dx = \frac{1}{2}\,\frac{[x^2+2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{6}[x^2+2]^{\frac{3}{2}} + c$$

مثال : جد التكامل $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$

الحل :

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \int \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{-2}{3}}\;].\;\underbrace{\frac{3}{3}}_{\text{نضرب ونقسم على } 3} = 3\int \underbrace{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}}_{\text{مشتقة داخل القوس}} \left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 3\,\frac{\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 6\sqrt{1+\sqrt[3]{x}} + c$$

في الدوال المثلثية علينا مراعاة ما يأتي :

١) نرتب بحيث نضع الدالة المثلثية ثم المشتقة .

٢) يجب ان تكون المشتقة للدالة المثلثية موجودة .

مثال : جد تكامل ما يأتي :

1) $\int x^2 \sin x^3\; dx = \int \sin x^3\, x^2\, dx = \frac{1}{3}\int \sin x^3 \underbrace{3x^2}_{\text{مشتقة الزاوية}}\; dx = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$

2) $\int \sin x \cos^5 x\; dx = \int \cos^5 x \sin x\; dx = \int [\cos x]^5 \sin x\; dx\;].\frac{-1}{-1}$

$$= -\int [\cos x]^5(-\sin x)\; dx = -\frac{[\cos x]^6}{6} + c$$

$$3)\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}} = \int (1+\tan x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int (1+\tan x)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\sec^2 x}_{\text{مشتقة الدالة}}\,dx = \frac{(1+\tan x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{1+\tan x} + c$$

$$4)\int \tan x \sec^4 x\,dx = \int \sec^4 x \tan x\,dx = \int \sec^3 x \underbrace{\sec x \tan x}_{\text{مشتقة الدالة}}\,dx = \frac{(\sec x)^4}{4} + c$$

$$5)\int \tan^6 x \sec^2 x\,dx = \int \tan^6 x \underbrace{\sec^2 x}_{\text{مشتقة الدالة}}\,dx = \frac{1}{7}\tan^7 x + c$$

$$6)\int x\sqrt{x+3}\,dx = \int x+3-3\,(\sqrt{x+3})\,dx = \int ((x+3)-3)(x+3)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int (x+3)^{\frac{3}{2}}\,dx - 3\int (x+3)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(x+3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3\,\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

تكامل الدوال المثلثية التربيعية

ملاحظات :

١ – التكاملات المباشرة كما في الامثلة التالية :

$$1)\ \int \sec^2\theta\,d\theta = \tan\theta + c$$

$$2)\ \int \csc^2\theta\,d\theta = -\cot\theta + c$$

$$3)\ \int \tan^2\theta\,d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)\,d\theta = \int \sec^2\theta\,d\theta - \int d\theta = \tan\theta - \theta + c$$

$$4)\ \int \cot^2\theta\,d\theta = \int (\csc^2\theta - 1)\,d\theta = \int \csc^2\theta\,d\theta - \int d\theta = -\cot\theta - \theta + c$$

$$5)\ \int \sin^2\theta\,d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\int d\theta - \frac{1}{2}\int \cos 2\theta \underbrace{(2)}_{\text{مشتقة الزاوية}}\,d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + c = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$$

$$6)\ \int \cos^2\theta\,d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\int d\theta + \frac{1}{2}\int \cos 2\theta \underbrace{(2)}_{\text{مشتقة الزاوية}}\,d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + c = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$$

$$7)\ \int \sin(ax+b) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$$

$$8)\ \int \cos(ax+b) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$$

٢- التكاملات باستخدام قاعدة مشتقة الزاوية للدالة المثلثية وكما في الامثلة التالية :

مثال : جد تكاملات كل مما يأتي :

1) $\int 9\sin 3x\,dx = 3\int \underbrace{(3)}_{\text{مشتقة الزاوية}} \sin 3x\,dx = -3\cos 3x + c$

2) $\int x^2 \sin x^3\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{(3x^2)}_{\text{مشتقة الزاوية}} \sin x^3 dx = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$

3) $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}\,dx$

$= \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}\,dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx$

$= \int \pm(\sin x - \cos x)\,dx$

$= \pm(-\cos x - \sin x) + c = \mp(\cos x + \sin x) + c$

ملاحظة : $\int \sec^2(ax+b) = \frac{1}{a}\tan(ax+b)$

4) $\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x)dx = \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + c$

5) $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x}\,dx = \int \tan^{-3} x\sec^2 x\,dx = \frac{\tan^{-2} x}{-2} + c = \frac{-1}{2\tan^2 x} + c$

$\int \sec ax\tan ax = \frac{1}{a}\sec ax$ $\qquad$ $\int \csc ax\cot ax = -\frac{1}{a}\csc ax$

6) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \int \tan x\sec^2 x\,dx = \frac{\tan^2 x}{2} + c$

7) $\int \sin 6x\,\cos^2 3x\,dx = \int (2\sin 3x\cos 3x)\cos^2 3x\,dx$

$= \frac{2}{-3}\int \cos^3 3x\,(\sin 3x)(-3)dx = \left(\frac{-2}{3}\right)\frac{\cos^4 3x}{4} + c = \frac{-1}{6}\cos^4 3x + c$

8) $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\,dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}\,dx$

$= \int \frac{(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x}\,dx$

$= \int (\cos 2x + \sin 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,(2)dx + \frac{1}{2}\int (\sin 2x)\,(2)\,dx$

$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$

9) $\int \cot^2 5x\, dx = \int (\csc^2 5x - 1)\, dx = \int \csc^2 5x - \int dx = \frac{1}{5}\int \csc^2 5x(5)dx - \int dx$

$= -\frac{1}{5}\cot 5x - x + c$

10) $\int \tan^2 7x\, dx = \int (\sec^2 7x - 1)\, dx = \frac{1}{7}\int (\sec^2 7x)\,(7)dx - \int dx = \frac{1}{7}\tan 7x - x + c$

٣- اذا كانت الزوايا في السؤال غير متساوية فنساوي الزوايا كما يلي :

11) $\int \sin 4x \,.\, \cos^2 2x\, dx$

$\boxed{\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x}$ $\boxed{\sin 2x = 2\sin x \cos x}$

$= \int 2\sin 2x \cos 2x \cos^2 2x\, dx = 2\int (\cos 2x)^3 \sin 2x\, dx$

$= \frac{2}{-2}\int (\cos 2x)^3\,(\sin 2x)\,(-2)dx = -\frac{(\cos 2x)^4}{4} + c$

12) $\int \sin 6x \,.\, \cos^4 3x\, dx$

$\int 2\sin 3x \cos 3x \,.\, \cos^4 3x\, dx = 2\int \cos^5 3x \sin 3x\, dx$

$= \frac{-2}{3}\int \cos^5 3x\,(-3\sin 3x)\, dx = \frac{-2}{3}\frac{\cos^6 3x}{6} + c = \frac{-}{9}\cos^6 3x + c$

٤- تكاملات مربعات الدوال الدائرية :

$$\cos^2 x = \begin{cases} 1 - \sin^2 x & n \text{ فردي} \\ \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

$$\sin^2 x = \begin{cases} 1 - \cos^2 x & n \text{ فردي} \\ \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

مثال : جد تكامل كلا مما يأتي :

1) $\int \cos^3 x\, dx$

$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)\,.\cos x\, dx$ $\boxed{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x}$

$= \int \cos x - \sin^2 x \cos x\, dx = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3} + c$

2) $\int (\cos^2 x)^2 dx$

$\int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + \cos 2x)^2 dx$ $\boxed{\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)}$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) = \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x + \sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right)\right] + c = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$3)\ \int \sin^2 3x\ dx = \int \frac{(1 - \cos 6x)}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx - \int \frac{\cos 6x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{2}\cos 6x\,(6)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

$$4)\ \int (\cos^4 x - \sin^4 x)\ dx$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\ dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)dx$$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= \int \cos 2x\ dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\ (2)\ dx = \frac{\sin 2x}{2} + c$$

$$5)\ \int \frac{\sin^3 x\ dx}{1 - \cos x}$$

$$\int \frac{\sin^3 x\ dx}{1 - \cos x} = \int \frac{\sin^2 x \sin x\ dx}{1 - \cos x} = \int \frac{(1 - \cos^2 x)\sin x\ dx}{1 - \cos x}$$

$$= \int \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)\sin x\ dx}{1 - \cos x} = \int (\sin x + \sin x \cos x)\ dx$$

$$= -\cos x + \frac{(\sin x)^2}{2} + c$$

$$6)\ \int \sin^4 x\ dx = \int (\sin^2 x)^2\ dx = \int \left[\frac{1 - \cos 2x}{2}\right]^2 dx = \int \frac{(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)}{4} dx$$

$$= \int \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx - \int 2\cos 2x\ dx + \int \cos^2 2x\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx - \int 2\cos 2x\ dx + \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int dx - \int 2\cos 2x\ dx + \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x\ .(4)\right] dx\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + c = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

7) $\int \cos 2x \,.\, \sin^2 x \, dx$

$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$$= \int \cos 2x \,\frac{1}{2}\,(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int[\cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x)]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\int(\cos 2x\,(2) - \frac{1}{2}[\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x\,(4)\,dx]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right)\right] + c = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x + \frac{\sin 4x}{16} + c$$

8) $\int \cos^3 2x \; dx = \int \cos 2x \cos^2 2x\, dx = \int \cos 2x\,(1-\sin^2 2x)dx$

$$= \int(\cos 2x - \sin^2 2x \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,(2)\,dx - \frac{1}{2}\int \sin^2 2x \cos 2x\,(2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\sin^3 2x + c = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x + c$$

9) $\int \sqrt{1+\sin 2x}\;\; dx$

$$\int \sqrt{1+\sin 2x}\;\; dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}\;\; dx$$

$$= \int \sqrt{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x}\;\; dx = \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\,dx$$

$$= \int \pm(\sin x + \cos x)dx = \pm(-\cos x + \sin x) + c = \mp(\cos x - \sin x) + c$$

10) $\int \sin^2 x \cos^2 x \;\; dx$ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin x$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2\, dx = \int [\frac{1}{2}\sin 2x]^2\, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$$

11) $\int(\cos 2x - \sec x)(\cos 2x + \sec x)\;\; dx$

$$\int(\cos 2x - \sec x)(\cos 2x + \sec x)dx = \int(\cos^2 2x - \sec^2 x)\,dx$$

$$= \int [\frac{1}{2}(1+\cos 4x) - \sec^2 x]\,dx = \int \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\int \cos 2x\,(4)\;\, dx - \int \sec^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x - \tan x + c$$

12) $\int \sqrt[3]{x^3 + 2x^5}\;\; dx$

الحل : نستخرج عامل مشترك لأن المشتقة داخل القوس غير موجودة

$$= \int \sqrt[3]{x^3(1+2x^2)}\;\; dx = \int x\sqrt[3]{1+2x^2}\;\; dx = \int x\,(1+2x^2)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+2x^2)^{\frac{1}{3}}.4x\,dx = \frac{1}{4}\frac{(1+2x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{16}(1+2x^2)^{\frac{4}{3}} + c$$

13) $\int (1-2sin3x)^2 \; dx$ $\quad$ $\boxed{sin\,2x = 2sin\,x\,cos\,x}$ $\quad$ $\boxed{sin\,x\,cos\,x = \frac{1}{2}sin\,x}$

$$\int (1-2sin3x)^2 dx = \int (1-4sin3x + 4sin^2 3x)\,dx$$

$$= \int \left(1-4sin3x + 4\left(\frac{1}{2}\right)(1-cos6x)\right) dx = \int (1-4sin3x+2-2cos6x)\,dx$$

$$= \int 3\,dx - \frac{4}{3}\int sin3x\,(3)dx - \frac{2}{6}\int cos6x\,(6)dx = 3x + \frac{4}{3}cos\,3x - \frac{1}{3}sin6x + c$$

14) $\int (tan\,x + cotx)^2 \; dx$

$$\int (tan\,x + cotx)^2 dx = \int (tan^2x + 2tan\,x\,cot\,x + cot^2x)\,dx$$

$$= \int \left(sec^2x - 1 + 2\frac{sinx}{cosx}.\frac{cosx}{sinx} + (csc^2x - 1)\right) dx$$

$$= \int (sec^2x + csc^2x - 2 + 2(1))dx$$

$$= \int (sec^2x + csc^2x)\,dx = tanx - cotx + c$$

ملاحظة :

$\{2\,sin^2x - 1 \;,\; 1-2cos^2 x \;,\; sin^2 x - cos^2x \;,\; sin^4 x - cos^4\} = -cos2x$

حل تمارين (2 – 4)

جد تكاملات كل مما يأتي ضمن مجال الدالة

1) $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\,dx = \int \frac{(4x^4-12x^2+9)-9}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{4x^4}{x^2} - \frac{12x^2}{x^2}\right) dx$

$$= \int (4x^2 - 12)\,dx = \frac{4}{3}x^3 - 12\,x + c$$

2) $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\,dx$ $\qquad$ $\sqrt{7x} = \sqrt{7}\sqrt{x} \;,\; \sqrt{5x} = \sqrt{5}\sqrt{x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{(3-\sqrt{5}\sqrt{x})^7}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \left(3 - \sqrt{5}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^7 .x^{-\frac{1}{2}}$$



$$= \frac{-2}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{7}} \int \left(3 - \sqrt{5}\, x^{\frac{1}{2}}\right)^7 \Big(\underbrace{-\frac{\sqrt{5}}{2} x^{-\frac{1}{2}}}_{\text{مشتقة داخل القوس}} \Big) dx = \frac{-2}{\sqrt{35}} \frac{(3 - \sqrt{5x})^8}{8} + c$$

$$= \frac{-1}{4\sqrt{35}} (3 - \sqrt{5x})^8 + c$$

3) $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x}{1-\sin x}\, dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{1-\sin x}\, dx$

$$= \int \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)\cos x}{1 - \sin x}\, dx = \int (1 + \sin x)\cos x\, dx$$

$$= \int (\cos x + \sin x \cos x)\, dx = \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + c$$

4) $\int \csc^2 x \cos x\, dx$ $\quad$ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$$= \int \csc x \csc x \cos x\, dx = \int \csc x \frac{1}{\sin x} \cos x\, dx \,, \qquad \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$= \int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$$

ويحل بحل آخر بوضع $\csc^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

5) $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}\, dx = \int (3x^2 + 5)^{-4} . x\, dx$

$$= \frac{1}{6} \int (3x^2 + 5)^{-4} . (6x)\, dx = \frac{1}{6} \frac{(3x^2 + 5)^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{18(3x^2 + 5)^3} + c$$

6) $\int \sqrt[3]{x^2 + 10x + 25}\, dx = \int \sqrt[3]{(x+5)^2}\, dx$ $\quad$ نجعل المقدار مربع كامل

$$= \int (x+5)^{\frac{2}{3}}\, dx = \frac{(x+5)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5} (x+5)^{\frac{5}{3}} + c$$

(مشتقة داخل القوس $= 1$)

7) $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x\, dx$

$$= \int \sin x\, dx - \int \sin x \cos^2 x\, dx = \int \sin x\, dx + \int (\cos x)^2 (-\sin x)\, dx$$

$$= -\cos x + \frac{(\cos x)^3}{3} + c$$

8) $\int \frac{\cos \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$ $\quad$ المقام هو مشتقة زاوية تكامل الـ $\cos$

$$= \int \frac{\cos (1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\, dx = -2 \int \cos (1-x)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة الزاوية}} dx$$

$$= -2\sin(1-x)^{\frac{1}{2}} + c = -2\sin\sqrt{1-x} + c$$

لو كان السؤال أعلاه بالشكل التالي

$\int \frac{\sin\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$

المقام هو مشتقة زاوية تكامل الـ sin

$$= \int \frac{\sin(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}\, dx = -2\int \sin(1-x)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة الزاوية}} dx$$

$$= 2\cos(1-x)^{\frac{1}{2}} + c = 2\cos\sqrt{1-x} + c$$

9) $\int (3x^2+1)^2\, dx$

$\because$ مشتقة داخل القوس غير موجودة نفتح الاقواس

$$= \int (9x^4 + 6x^2 + 1)\, dx = \frac{9x^5}{5} + \frac{6x^3}{3} + x + c$$

10) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}$

$$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{x^{\frac{3}{4}}}\, dx = \int \frac{(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}\, dx$$

$$= \int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\, x^{\frac{1}{4}} . x^{\frac{-3}{4}}\, dx = \int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} .\ x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= -2\int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} . \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة داخل القوس}} dx = -2\frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -4\frac{(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

$\int \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\, dx$ لو كان السؤال أعلاه بالشكل التالي $x = \sqrt{x}\sqrt{x}$

$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{x} - \sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{4}}}$ نستخرجه عامل مشترك $\sqrt{x}$

$$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}}{x^{\frac{3}{4}}}\, dx = \int \frac{(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}}\, dx$$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}}\ .\ x^{\frac{1}{4}}\, x^{\frac{-3}{4}}\, dx = \int (x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}} .\ x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= 2\int (x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{2}} . \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}_{\text{مشتقة داخل القوس}} dx = 2\frac{(x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 4\frac{(x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

11) $\int (1+\cos 3x)^2\, dx$

$$= \int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x)dx \qquad \boxed{\cos^2 3x = \frac{1}{2}(1+\cos 6x)}$$

$$= \int \left(1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\right) dx$$

$$= \int dx + \frac{1}{3}\int 2\cos 3x\,(3) dx + \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{6}\int \cos 6x\,(6)\,dx\right]$$

$$= \left[x + 2\frac{\sin 3x}{3} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 6x}{6}\right)\right] + c = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

12) $\int \sec^2 4x\, dx = \frac{1}{4}\int \sec^2 4x\,(4)\,dx = \frac{\tan 4x}{4} + c$

13) $\int \csc^2 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \csc^2 2x\,(2)\,dx = -\frac{\cot 2x}{2} + c$

14) $\int \tan^2 8x\, dx = \int (\sec^2 8x - 1)dx = \frac{\tan 8x}{8} - x + c$

15) $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1 - \cos^2 2x}\, dx = \int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{\sin^2 2x}$

$f(x) = \cot 2x \Rightarrow f'(x) = -2\csc^2 2x$

$$= -\frac{1}{2}\int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}}(\csc^2 2x)(-2)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(\cot 2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{-1}{3}(\cot 2x)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{-1}{3}\sqrt{(\cot^3 2x)} + c$$

16) $\int \cos^2 2x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)dx = \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x\,(4)\,dx\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 4x}{8} + c$$

17) $\int \sin^2 8x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 16x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 16x}{16}\right) + c = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 16x}{32}$

18) $\int \cos^4 3x\, dx = \int (\cos^2 3x)^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\right]^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 6x + \cos^2 6x)dx \qquad \cos^2 6x = \frac{1}{2}(1 + \cos 12x)$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 6x + \frac{1}{2}(1 + \cos 12x)\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{6}\int 2\cos 6x\,(6)dx + \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{12}\int \cos 12x(12)dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[x + \frac{2\sin 6x}{6} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 12x}{12}\right)\right] + c$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{96}\sin 12x + c$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{96}\sin 12x + c$$

اللوغاريتم الطبيعي

لتكن u دالة موجبة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x فإن مشتقة اللوغاريتم الطبيعي للدالة u هي :

$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{الدالة}} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u}$ وعليه فإن $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$ شرط ان تكون الدالة (u) موجبة

وتستخدم هذه الدالة في توفير المشتقة الأولى في بعض الدوال التي يصعب اشتقاقها وهي تملك مجموعة من الخصائص الخاصة مثل :

$\ln 1 = 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln(x^y) = y\ln x$, $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

مثال : جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $y = \ln(3x^2 + 4)$

$$y = \ln(3x^2 + 4) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 + 4}$$

2) $y = \ln(\sin x)$

$$y = \ln(\sin x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

3) $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow y = \ln x^{-2}$$

$$y = \ln x^{-2} = -2\ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = -2\,\frac{1}{x} = \frac{-2}{x}$$

4) $y = \ln(\tan x + x^2)$

$$y = \ln(\tan x + x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x + 2x}{\tan x + x^2}$$

5) $y = \ln(\ln x)$

$$y = \ln(\ln x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x}$$

$6)\ y = ln\,3x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$$

مثال : جد مشتقة الدوال التالية :

$1)\ \ y = ln(x\sin x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\cos x + \sin x}{x\sin x}$

$2)\ \ y = ln(x\,y^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x\,y + y^2}{x\,y^2}$

$3)\ \ y = (\sin x)^x \Rightarrow ln\,y = ln(\sin x)^x \Rightarrow ln\,y = x\,ln\,sinx$

$$\frac{y'}{y} = x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + ln\,(\sin x)(1) \Rightarrow y' = xy(\frac{\cos x}{\sin x}) + yln\,(\sin x)$$

تعريف : $\int \frac{dx}{x} = ln\,|x| + c$ اي اذا كان المقام اسه (1) ومشتقته موجودة بالبسط فيكون تكامل ln .

مثال : جد تكامل كل مما يأتي :

$1)\ \int \frac{dx}{x+1} = ln\,|x+1| + c$

$2)\ \int \frac{(4x+1)}{(2x^2+x)}\,dx = ln\,|2x^2 + x| + c$

$3)\ \int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = ln\,|\sin x| + c$

$4)\ \int \frac{dx}{xln\,x} = \int \frac{\frac{1}{x}\,dx}{ln\,x} = ln\,|ln\,x| + c$

$5)\ \int \frac{\cos\theta\,d\theta}{1+\sin\theta} = ln|1+\sin\theta| + c$

دالة اللوغاريتم الطبيعي

الدالة الاسية e^u هي دالة عكسية لدالة اللوغاريتم الطبيعي بمعنى آخر هناك بعض الدوال عندما نشتقها أو نكاملها ندخل عليها الدالة الاسية ثم عندما ننتهي نقوم بالغاء الدالة الاسية عن طريق ادخال دالة اللوغاريتم الطبيعي الهدف من هذه العملية هي لتغير شكل الدالة المراد العمل عليها .

$$\frac{d}{dx}(e^u) = (\text{الدالة})(\text{مشتقة الاس}) = e^u\frac{du}{dx}$$

وعليه فإن $\int e^u = e^u + c$ وهي تمتلك مجموعة من الخصائص الخاصة مثل :

$e = 2.71828$ $e^x \, . \, e^y = e^{x+y}$ $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ $e^0 = 1$ $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

مثال : لتكن $y = e^{\tan x}$ فجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = e^{\tan x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\tan x}.(sec^2 x)$$

مثال : جد $\int x\, e^{x^2}\, dx$

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

الدالة الاسية (الاساس عدد ثابت)

نفرض أن a عدد ثابت يمثل أساس الدالة الاسية فإن مشتقة أي دالة اسية مرفوعة لقوة u هي

$\frac{d}{dx}a^u = $ (الدالة) (ln الاساس) (مشتقة الاس) $= a^u \, . \, ln\, a \frac{du}{dx}$ وعليه فإن $\int(a^u)\, du = \frac{1}{lna}e^u + c$

وتتميز ببعض الخصائص التي ذكرناها في الدالة الاسية السابقة وسوف نوضح ذلك في المثال التالي :

مثال : جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $y = 4^{x^2-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4^{x^2-3}\; ln(4)\,(2x) = ln\, 4(4^{x^2-3})2x$

2) $y = 5^{sinx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5^{sinx}\, ln\, 5\,(cosx) = (ln\, 5)\, 5^{sinx}.cosx$

3) $y = (12)^{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (12)^{x^{\frac{1}{3}}}.ln\,(12).\frac{1}{3}\, x^{\frac{-2}{3}} = (ln\, 12)(12)^{x^{\frac{1}{3}}}.\frac{1}{3}\, x^{\frac{-2}{3}}$

4) $y = 7^{\frac{-x}{3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (7)^{\frac{-x}{3}}.ln\,(7)\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}ln\,(7).(7)^{\frac{-x}{3}}$

مثال : جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

1) $y = e^{x^2+x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x^2+x}(2x+1)$

2) $y = e^{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\sin x}cosx$

3) $y = e^{-x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-x}\,(-1) = -e^{-x}$

4) $y = lnx\, .\, e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = lnx\, .\, e^x + e^x.\frac{1}{x}$

5) $y = sin(xe^x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = cos\,(xe^x)[xe^x + e^x] = [xe^x + e^x]\, cos\,(xe^x)$

6) $y = 3^{(2+4^x)} \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 3^{(2+4^x)}(\ln 3)[4^x(\ln 4)(1)]$

7) $y = \cot e^{2x} \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\csc^2 e^{2x}(2e^{2x})$

8) $y = 5^{\sin x} \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 5^{\sin x}\ln(5)\cos x = (\ln 5)5^{\sin x}\cos x$

مثال : جد تكامل لكل مما يأتي :

1) $\int e^{x^2+x}\underbrace{(2x+1)}_{\text{مشتقة الاس}}\,dx = e^{x^2+x} + c$

2) $\int e^{\sin x}\underbrace{(\cos x)}_{\text{مشتقة الاس}}\,dx = e^{\sin x} + c$

3) $\int x^2 e^{x^3}\,dx = \int e^{x^3} x^2\,dx = \dfrac{1}{3}\int e^{x^3}\underbrace{(3x^2)}_{\text{مشتقة الاس}}\,dx = \dfrac{1}{3}e^{x^3} + c$

4) $\int (1+e^x)^2\,dx = \int (1 + 2e^x + e^{2x})\,dx$

$= \int \left[1 + 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x}(2)\right]dx = x + 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$

5) $\int e^{\tan x}.\sec^2 x\,dx = e^{\tan x} + c$

6) $\int \dfrac{e^{\ln x}}{x}\,dx = e^{\ln x} + c = x + c$

7) $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} + c$

8) $\int 4^x\,dx = 4^x\left(\frac{1}{\ln 4}\right) + c$

9) $\int 3^{\tan 7x}(\sec^2 7x)dx = \frac{1}{7}\int 3^{\tan 7x}(\sec^2 7x)(7)dx = \frac{1}{7}3^{\tan 7x}\left(\frac{1}{\ln 3}\right) + c$

حل تمارين (3 – 4)

س1/ جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $y = \ln 3x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$

b) $y = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\frac{x}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{x}$

c) $y = \ln x^2 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\,.2x = \frac{2}{x}$

d) $y = (\ln x)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(\ln x).\frac{1}{x} = \frac{2}{x}\ln x$

e) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^3 \Rightarrow y = \ln x^{-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^{-4}}{x^{-3}} = -3x^{-1} = \frac{-3}{x}$

f) $y = \ln(2-\cos x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(-\sin x)}{2-\cos x} = \frac{\sin x}{2-\cos x}$

g) $y = e^{-5x^2+3x+5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-5x^2+3x+5}.(-10x+3) = (-10x+3)e^{-5x^2+3x+5}$

h) $y = 9^{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 9^{\sqrt{x}}.\ln 9\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{9^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(\ln 9)$

i) $y = 7^{-\frac{x}{4}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 7^{-\frac{1}{4}x}\ln 7.\left(-\frac{1}{4}\right) = 7^{-\frac{x}{4}}\left(\frac{-\ln 7}{4}\right)$

j) $y = x^2e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2.e^x + e^x.2x = xe^x(x+2)$

س2 / جد التكاملات الاتية :

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx$ مشتقة المقام موجودة فالتكامل هو $\ln$

$= [\ln|x+1|]_0^3 = \ln(3+1) - \ln(0+1) = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 - 0 = \ln 2^2 = 2\ln 2$

b) $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}dx = [\ln|x^2+9|]_0^4 = \ln(16+9) - \ln(0+9) = \ln(25) - \ln(9)$

$= \ln 5^2 - \ln 3^2 = 2\ln 5 - 2\ln 3 = 2\ln\frac{5}{3}$

c) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}(2)dx = \frac{1}{2}[e^{2x}]_{\ln 3}^{\ln 5} = \frac{1}{2}[e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3}]$

$= \frac{1}{2}[e^{\ln 5^2} - e^{\ln 3^2}] = \frac{1}{2}[5^2 - 3^2] = \frac{1}{2}[16] = 8$

d) $\int_0^{\ln 2} e^{-x}dx = -\int_0^{\ln 2} e^{-x}(-1)dx = -[e^{-x}]_0^{\ln 2} = -[e^{-\ln 2} - e^0]$

$= -[e^{\ln 2^{-1}} - e^0] = -[2^{-1} - 1] = -\left[\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{1}{2}$

e) $\int_0^1 (1+e^x)^2e^x dx = \left[\frac{(1+e^x)^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{(1+e)^3}{3} - \frac{(1+e^0)^3}{3}\right] = \frac{(1+e)^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{(1+e)^3}{3} - \frac{8}{3}$

ويمكن ان يحل السؤال بطريقة ثانية وهي توزيع e^x على القوس بعد فتح القوس

f) $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{(x^3+4x+1)}dx = [\ln(x^3+4x+1)]_0^1 = \ln(1^3+4(1)+1 - \ln(0^3+4(0)+1)$

$= \ln 6 - \ln 1 = \ln 6 - 0 = \ln 6$

g) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = \int_1^4 e^{x^{\frac{1}{2}}}.\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[e^{x^{\frac{1}{2}}}\right]_1^4 = [e^{\sqrt{x}}]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e^1$

h) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\, dx}{2+\tan x} = [\ln|2+\tan x|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \ln(2+\tan\frac{\pi}{4}) - \ln\left(2+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$= ln(2+1) - ln(2-1) = ln3 - ln1 = ln3 - 0 = ln\,3$$

i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} .\cos x\,dx$

$$= \left[\frac{(\sin x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[(\sin x)^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left[\sqrt{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left[\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}\right] = 2\left[\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right] = 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

j) $\int \cot^3 5x\,dx = \int \cot^2 5x \cot 5x\,dx = \int (\csc^2 5x - 1)\cot 5x\,dx$

$$= \int (\cot 5x \csc^2 5x - \cot 5x)\,dx = \int (\cot 5x \csc^2 5x)\,dx - \int (\cot 5x)dx$$

$$= \frac{1}{5}\int \cot 5x \csc^2 5x\,(5)dx - \frac{1}{5}\int \frac{\cos 5x}{\sin 5x}(5)dx$$

$$= -\frac{1}{5}\frac{\cot^2 5x}{2} - \frac{1}{5} ln|\sin 5x| + c = -\frac{1}{10}\cot^2 5x - \frac{1}{5} ln|\sin 5x| + c$$

k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}(-\sin x)dx$

$$= -[e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left[e^{\cos\frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0}\right] = -[e^0 - e^1] = -1 + e$$

l) $\int_1^2 x e^{-ln\,x}\,dx = \int_1^2 x\, e^{ln\,x^{-1}}\,dx = \int_1^2 x.x^{-1}\,dx = \int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$

س3/ اثبت أن :

a) $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2$ ٢٠١٩ / د١ / احيائي

$$L.H.S = \int_1^8 \frac{(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}} .x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 3\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx\right)$$

$$= 3\left[\frac{(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = 3\left(\frac{2}{3}\right)\left[[(8)^{\frac{1}{3}}-1]^{\frac{3}{2}} - [(1)^{\frac{1}{3}}-1]^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 2\left[[2-1]^{\frac{3}{2}} - [1-1]^{\frac{3}{2}}\right] = 2(1) = 2 = R.H.S$$

b) $\int_{-2}^4 |3x-6|dx = 30$

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & x \geq 2 \\ -3x+6 & x < 2 \end{cases}$$

$$L.H.S=\int_{-2}^{4}|3x-6|dx=\int_{-2}^{2}(-3x+6)\,dx+\int_{2}^{4}(3x-6)dx$$

$$=[\frac{-3}{2}x^2+6x]_{-2}^{2}+[\frac{3}{2}x^2-6x]_{2}^{4}$$

$$=\left[\frac{-12}{2}+12\right]-\left[\frac{-12}{2}-12\right]+\left[\frac{48}{2}-24\right]-\left[\frac{12}{2}-12\right]$$

$$=[-6+12]-[-6-12]+[24-24]-[6-12]$$

$$=6+18+0+6=30=R.H.S$$

س4/ $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2\,,6]$ فإذا كان $\int_{1}^{6}f(x)dx=6$ وكان $\int_{-2}^{6}[f(x)+3]dx=32$ فجد $\int_{-2}^{1}f(x)\,dx$

الحل :

$$\because\int_{-2}^{6}[f(x)+3]dx=32$$

$$\int_{-2}^{6}f(x)\,dx+\int_{-2}^{6}3\,dx=32$$

$$\int_{-2}^{6}f(x)\,dx+[3x]_{-2}^{6}=32$$

$$\int_{-2}^{6}f(x)\,dx+[3(6)-3(-2)]=32$$

$$\int_{-2}^{6}f(x)\,dx+[18+6]=32$$

$$\int_{-2}^{6}f(x)\,dx+[24]=32$$

$$\int_{-2}^{6}f(x)\,dx=32-24$$

$$\int_{-2}^{6}f(x)\,dx=8$$

$$\int_{-2}^{6}f(x)\,dx=\int_{-2}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{6}f(x)\,dx$$

$$\int_{-2}^{1}f(x)\,dx+6=8\Rightarrow\int_{-2}^{1}f(x)\,dx=8-6\Rightarrow\int_{-2}^{1}f(x)\,dx=2$$

س5/ اذا علمت أن $\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\, dx$ فجد قيمة $a \in R$.

الحل :

$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\, dx \Rightarrow [\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x]_1^a = 2[tanx]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = 2[tan\,\frac{\pi}{4} - tan\,0]$$

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-1 = 2[1-0] \Rightarrow \frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-1 = 2$$

$$\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-1-2 = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a-3 = 0\right]\times 2$$

$$a^2+a-6=0 \Rightarrow (a+3)(a-2)=0$$

$either \quad a+3=0 \Rightarrow a = -3$ يهمل

$or \quad a-2=0 \Rightarrow a=2 \quad a>1$ لأن

س6/ لتكن $f(x) = x^2+2x+k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_1^3 f(x)dx$

الحل : ∵ للدالة نهاية صغرى

$$f(x) = x^2+2x+k$$

$$\acute{f}(x) = 2x+2$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow 2x = -2 \overset{\div 2}{\Rightarrow} x = -1$$

لأنه عندما يأتي في السؤال نهاية صغرى فهي تمثل الاحداثي y في النقطة .

$(-1\,,-5)$ هي نقطة نهاية صغرى محلية وهي تحقق معادلة الدالة $f(x)$.

$$-5 = (-1)^2+2(-1)+k \Rightarrow -5 = 1-2+k \quad \Rightarrow k = -4$$

$$f(x) = x^2+2x-4$$

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (x^2+2x-4)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-4x\right]_1^3 = \left[\frac{27}{3}+\frac{2(9)}{2}-12\right]-\left[\frac{1}{3}+\frac{2}{2}-4\right]$$

$$= [9+9-12]-\left[\frac{1}{3}+1-4\right] = 6-\left[\frac{-8}{3}\right] = \frac{18+8}{3} = \frac{26}{3}$$

س7/ اذا كان المنحني $f(x) = (x-3)^3+1$ نقطة الانقلاب $(a\,,b)$ جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b \acute{f}\,(x)dx - \int_0^a \acute{\acute{f}}(x)\,dx$

الحل : نقطة الانقلاب ناتجة من مساواة المشتقة الثانية للصفر

$$f(x) = (x-3)^3+1$$

$\acute{f}(x) = 3\,(x-3)^2$

$\acute{\acute{f}}(x) = 6\,(x-3) \Rightarrow 6\,(x-3) = 0 \overset{\div 6}{\Rightarrow} x-3=0 \Rightarrow x=3$

$f(3) = (3-3)^3 + 1 = 1$ نقطة الانقلاب هي $(3\,,1)$

$(3\,,1) \Rightarrow (a\,,b) \Rightarrow a = 3 \;,\; b = 1$

$$\int_0^b \acute{f}(x)dx - \int_0^a \acute{\acute{f}}(x)\,dx$$

$$\int_0^1 3(x-3)^2 - \int_0^3 6(x-3)dx$$

$$= 3\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^1 - 6\left[\frac{(x-3)^2}{2}\right]_0^3$$

$$= [(1-3)^3 - (0-3)^3\,] - [\,3(3-3)^2 - 3(0-3)^2]$$

$$= [-8+27] - [0-27] = [19+27] = 46$$

إيجاد مساحة المنطقة المستوية

مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور السينات :

نساوي الدالة المعطاة بالصفر ثم نحل المعادلة لإيجاد قيم x ومن ثم يتحول السؤال الى أحد الاحتمالات الخمسة التالية :

أ- اذا أعطيت الفترة $[a\,,b]$ في الدالة فنقوم بتصفير الدالة واستخراج قيم x فإذا كانت تنتمي الى الفترة المعطاة فنقوم بتجزئة التكامل الى جزئين أو أكثر .

أما اذا كانت لا تنتمي لها فلا نجزيء التكامل ولكن في كلتا الحالتين نقوم بأخذ القيم الناتجة المطلقة للتكاملات .

ب- تعطى القيم على شكل $[a\,,b]$ مثلا أو على شكل بعبارة المستقيمين $x = a\,, x = b$ ويكون لها نفس التفسير السابق .

ج- اذا لم تعطى فترة أو مستقيمين في السؤال فإن قيم x الناتجة ترتب تصاعديا وإعتبارها قيم التكامل دون اهمال اي قيمة وهي على الاقل قيمتين .

د- اذا كان المطلوب إيجاد المساحة بين منحني ومحور السينات ومستقيم $x = a$ فقط .

نقوم بإضافة هذه القيمة الى القيم الناتجة من مساواة الدالة بالصفر ثم ترتب تصاعديا وإعتبارها فترة دون اهمال اي قيمة .

ه- هناك بعض الدوال لا يمكن تحليلها لإيجاد قيمة x عن التصفير فإن المساحة تكون تكاملاً واحداً وعلى الفترة المعطاة .

مثال : جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 2]$.

الحل :

$f(x) = x^3 - 4x \Rightarrow x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 4) = 0$

$either \quad x = 0$

$or \quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$ $\boxed{x = 0}$, $\boxed{x = 2}$, $\boxed{x = -2}$

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = [0] - [4 - 8] = 4$$

$$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{0}^{2} = [4 - 8] - [0] = -4$$

$A = |A_1| + |A_2| = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8\ unit^2$

مثال : جد المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x = 3 , x = 1$

الحل : حيث لا تجزأ الفترة فنعتمد على الفترة المعطاة $[1, 3]$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1, 3]$

$A = \int_1^3 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}\ unit^2$

مثال : جد المساحة المحددة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات .

الحل :

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x(x - 2)(x - 1) = 0$

$either \quad x = 0$

$or \quad (x - 2)(x - 1) = 0$

$\boxed{x = 0}$, $\boxed{x = 1}$, $\boxed{x = 2}$

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 \Rightarrow A_1 = \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - (0) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2 \Rightarrow A_2 = (4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = -\frac{1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}\ unit^2$$

مثال : جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2 , 3]$

الحل :

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1 \in [-2 , 3]$$

$$[-2 , -1]\ , [-1 , 1] , [1 , 3]$$

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} = (\frac{-1}{3} + 1) - (\frac{-8}{3} + 2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = (\frac{1}{3} - 1) - (\frac{-1}{3} + 1) = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$A_3 = \int_{1}^{3} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3} = (9 - 3) - (\frac{1}{3} - 1) = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right| = 9\frac{1}{3}\ unit^2$$

مثال : جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = 3x^2 + 4$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-1 , 1]$

الحل : نجعل $y = 0$

$$3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 = -4 \Rightarrow x^2 = \frac{-4}{3}$$ لا يمكن

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (3x^2 + 4)dx$$

$$A = [x^3 + 4x]_{-1}^{1} = (1 + 4) - (-1 - 4) = (5 + 5) = |10| = 10\ unit^2$$

مثال : جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\frac{\pi}{2} , \pi]$

الحل : نجعل $y = 0$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \qquad n = 0 , 1 , 2 , -1 , -2$$

نأخذ قيم موجبة وسالبة لأن الفترة المعطاة موجبة وسالبة .

$n = 0\ , x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$ يجزئ التكامل

$n = 1\ , x = \pi \in \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$ لا يجزئ التكامل

$n = 2\ , x = 2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$ لا يجزئ التكامل

$n = -1\ , x = -\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$ لا يجزئ التكامل

$n = -2\ , x = -2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2} , \pi\right]$ لا يجزئ التكامل



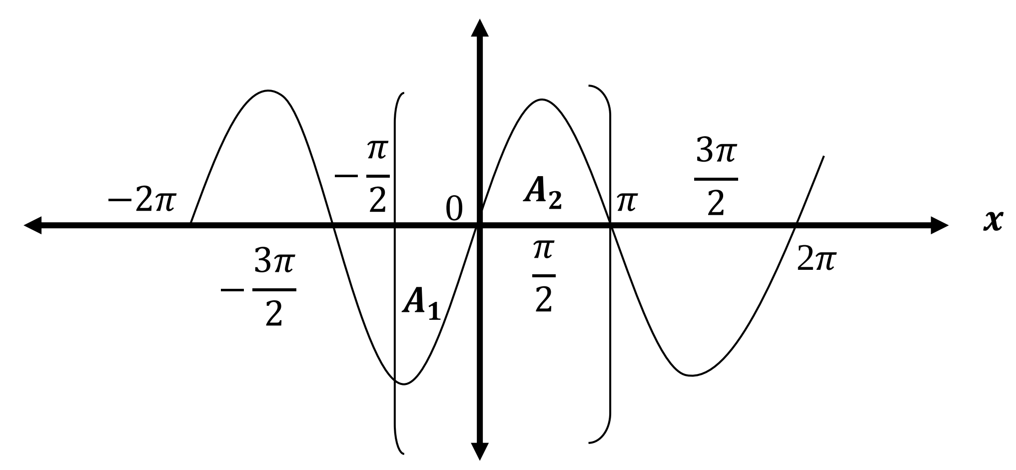


$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f\,(x)dx$$

$$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$$

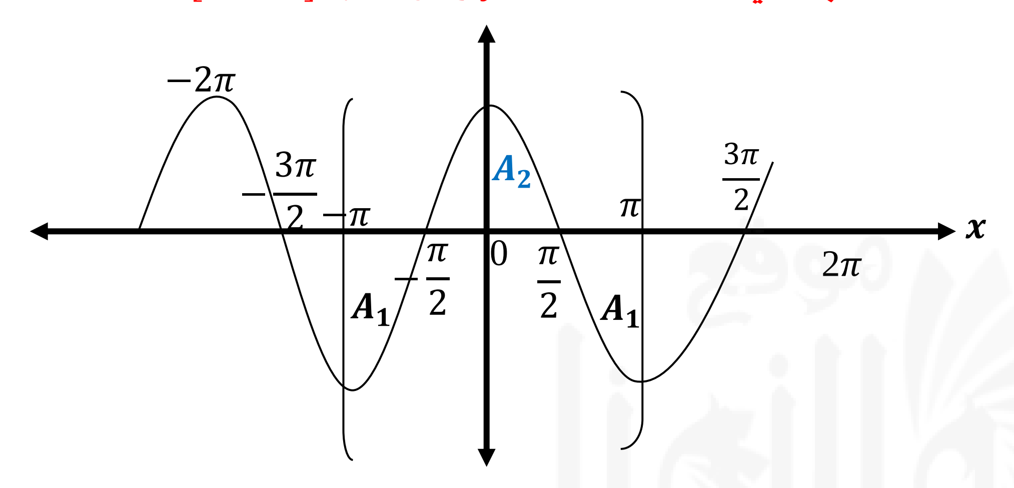
$$A = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + [-\cos x]_{0}^{\pi} = \left(-\cos 0 + \cos\frac{-\pi}{2}\right) + (-\cos\pi + \cos 0)$$

$$A = (-1+0) + (1+1) = |-1| + |2| = |3| = 3\ unit^2$$



ملاحظة : رسم منحني الـ sin فعلى اساسه نجد القيمة المنتمية الى الفترة المعطاة $[-\frac{\pi}{2}\ ,\pi]$.

مثال : جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y\ =\ \cos x$ وعلى الفترة $[-\pi\ ,\pi]$.



ملاحظة : رسم منحني الـ cos فعلى اساسه نجد القيمة المنتمية الى الفترة المعطاة $[-\pi\ ,\pi]$

$$\cos x\ = 0\ , \qquad x = \frac{\pi}{2} + n\,\pi \qquad n\ \in Z$$

$n\ =\ 0\ ,\ x = \frac{\pi}{2} \in [-\pi\ ,\pi]$ يجزئ التكامل

$n\ =\ 1\ ,x\ = \frac{3\pi}{2} \notin [-\pi\ ,\pi]$ لا يجزئ التكامل

$n\ =\ -1\ ,x\ = \frac{-\pi}{2} \in [-\pi\ ,\pi]$ يجزئ التكامل

$n = -2 \;, x = \frac{-3\pi}{2} \notin [-\pi \,, \pi]$ لا يجزئ التكامل

$n = 2 \;, x = \frac{5\pi}{2} \notin [-\pi \,, \pi]$ لا يجزئ التكامل

$$[-\pi\,,\pi] \Rightarrow \left[-\pi\,,-\frac{\pi}{2}\right] , \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right] , \left[\frac{\pi}{2}\,,\pi\right]$$

$$A_1 = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x\,]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin(-\pi) = -1 + 0 = -1$$

$$A_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x\,]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

$$A_3 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx = \sin x\,]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = |-1| + |2| + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4\ unit^2$$

ملاحظات :

١- اذا كانت $\sin ax\,, \cos ax = \pm\left\{\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ فإننا نستخرج زاوية الاسناد ثم نستخرج قيمة x حسب موقع الزاوية في الارباع .

٢- اذا كانت $\tan ax\,, \cot ax = \pm\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\sqrt{3}\,,1\right\}$ فإننا نستخرج زاوية الاسناد ثم نستخرج قيمة x حسب موقع الزاوية في الارباع .

٣- اذا كانت $\sin ax\,, \cos ax = \pm\{1\,,-1\}$ نستخرج قيمة x من خلال دائرة الوحدة .

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi$ $\quad n = 0\,,1\,,2\,,-1\,,-2$ حسب الحاجة

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $\quad n = 0\,,1\,,2\,,-1\,,-2$ حسب الحاجة

واجبات

س1 / جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 4x$ ومحور السينات على الفترة $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$

س2 / جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \cos 2x$ ومحور السينات ضمن الفترة $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$

س3 / جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = 3x^2 - 6x$ ومحور السينات .

مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين :

اذا علمت معادلتي منحني $f(x)$ ، $g(x)$ المعرفتين على الفترة $[a\,,b]$ وكان المطلوب ايجاد المساحة بينهما فنقوم بايجاد الدالة المولدة وهي $h(x) = f(x) - g(x)$ مع مراعاة الاحتمالات الخمسة سابقة الذكر بالنسبة للدالة المولدة $h(x)$.

$$A = \left|\int_a^b h(x)\, dx\right|$$

ملاحظة : اذا كانت الدالة المولدة لها أكثر من صورة واحدة فيمكن إجراء التكامل على اي صورة منها ما لم نضرب بعدد أو نقسم على عدد أو نرفع الطرفين الى قوة معينة كأن تكون تربيع أو جذر .

مثال : جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$ وزاري ٢٠١١ / د١

الحل : $h(x) = \sqrt{x} - x$ الدالة المولدة

بالتربيع $x = \sqrt{x}$

$x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0$

$x = 0 \quad , \quad x = 1 \qquad x \in [0,1]$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\, dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{3}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$A = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right] - [0] = \frac{1}{6} \Rightarrow A = \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6} unit^2$$

مثال : جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

الحل : $h(x) = x^3 - x$ الدالة المولدة

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow either\ x = 0 \quad or\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$\boxed{x = 0} \quad , \quad \boxed{x = 1} \quad , \quad \boxed{x = -1} \qquad [-1, 0] \quad , \quad [0, 1]$

$$A = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x) dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x) dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|$$

$$A = \left|(0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0)\right| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{2}$$

مثال : جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \cos x$ ، $g(x) = \sin x$ وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل :

$[\sin x = \cos x] \div \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ زاوية الاسناد

دالة الظل موجبة في الربعين الأول والثالث

$x = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad or \qquad x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx\right| = \left|[\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} + [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\left(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$A = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1 + 0)\right| + \left|(1 + 0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| + \left|1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right|$$

$A = |\sqrt{2}+1| + |1-\sqrt{2}| = |\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1| = 2\sqrt{2} \ \ unit^2$

مثال : جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين وعلى الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $y=-\sin x \ , \ y=\cos x$

الحل : زاوية الاسناد $\frac{\pi}{4}$ حيث دالة الظل تكون سالبة في الربعين الثاني والرابع

$-\sin x = \cos x \Rightarrow -\tan x = 1$

$x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad or \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$A = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)dx = [\sin x - \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$A = \left(\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$A = |(1-0)-(-1-0)| = |1+1| = |2| = 2 \ unit^2$

مثال : جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=\sin 2x \ , g(x)=\sin x$ وعلى الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

الحل :

$h(x) = \sin 2x - \sin x$

$2\sin x\cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$either \ \ \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لا يجزئ $\quad x = \pi \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$or \quad \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \qquad x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x(2\cos x - 1)\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(2\cos x - 1)\,dx$

$A = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos x - 1)(-2\sin x)\,dx + \left(-\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x - 1)(-2\sin x)dx$

$A = -\frac{1}{4}[(2\cos x - 1)^2]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left(-\frac{1}{4}\right)[(2\cos x - 1)^2]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$A = -\frac{1}{4}\left[\left(2\cos\frac{\pi}{3} - 1\right)^2 - (2\cos 0 - 1)^2\right] - \frac{1}{4}\left[\left(2\cos\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 - \left(2\cos\frac{\pi}{3} - 1\right)^2\right]$

$A = \left|\frac{-1}{4}[(1-1)^2 - (2-1)^2]\right| + \left|\frac{-1}{4}[(0-1)^2 - (1-1)^2]\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

المسافة

المسافة : ويرمز لها بالرمز (d) وهي كمية غير متجهة ، أما الازاحة فهي $S\ (t)$ والسرعة $V\ (t)$ والتعجيل $a\ (t)$ وهي كميات متجهة لذلك فإن :

$$d = \int_{t_1}^{t_2} |V(t)|\, dt \quad , \quad S\ (t) = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\, dt \quad , \quad V(t) = \int a\ (t)dt$$

ملاحظات : 1) اقصى مسافة يصل اليها الجسم عندما تكون السرعة $= 0$

2) بعد الجسم بعد مرور 3 sec من البدء بالحركة $[0\ ,3]$

3) أقصى سرعة يصل اليها الجسم عندما يكون التعجيل $= 0$

ملاحظات : اذا كانت $V\ (t)$ تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم فإن :

1. المسافة المقطوعة في أو خلال الثانية t هي $d = |\int_{t-1}^{t} V\ (t)dt|$ فمثلاً اذا طلب في السؤال جد المسافة خلال الثانية الثامنة يعني حساب $\int_7^8$

2. بعد الجسم بعد مرور t ثانية من بدء الحركة فان بعد الجسم هو $S = \int_0^t V\ (t)\ dt$

3. الازاحة التي يقطعها الجسم بالفترة $[a\ ,b]$ هي $S = \int_a^b V\ (t)\ dt$ وفي هذه الحالة لا يجب مساواة السرعة بالصفر لاستخراج قيم t اي ان الازاحة هي تكامل السرعة مباشرة على الفترة المعطاة .

4. المسافة التي يقطعها الجسم بعد مرور t ثانية من بدء الحركة هي $d = \int_0^t |V\ (t)|\ dt$ اي تكون بالفترة $[a\ ,b]$ ويجب علينا مساواة دالة السرعة بالصفر لاستخراج قيم t ومن ثم المقارنة بالفترة لنقرر التجزئة من عدمها.

ملاحظة : اذا كانت $a\ (t)$ تمثل تعجيل جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V\ (t)$ فإننا (نكامل بالتكامل غير المحدد) $\int a\ (t)dt = V\ (t) + c$

مثال : جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V\ (t) = 2t - 4\ m/s$ فجد :

أ) المسافة المقطوعة في الفترة $[1\ ,3]$

$$V\ (t) = 0 \ \Rightarrow 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \ \in [1\ ,3]$$

$$d = |\int_1^2 (2t-4)dt\ | + |\int_2^3 (2t-4)\ dt\ | = |[t^2 - 4t]_1^2| + |[t^2 - 4t]_2^3|$$

$$d = |(4-8) - (1-4)| + |(9-12) - (4-8)| \ = 1 + 1 = 2$$

ب) الازاحة المقطوعة بالفترة $[1\ ,3]$

$$S\ (t) \ = \int_1^3 (2t-4)dt = [t^2 - 4t]_1^3 = [9-12] - [1-4] = -3 + 3 = 0$$

ج) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

$$d = |\int_4^5 V\ (t)dt\ | = \ |\int_4^5 (2t-4)dt\ | = |[t^2 - 4t]_4^5| = |[25-20] - [16-16]| = 5\ m$$

د) بعده بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة

$$S = \int_0^4 (2t-4)dt = [t^2-4t]_0^4 = [16-16]-[0] = 0$$

مثال : جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18\ m/s^2)$ فاذا كانت سرعته قد أصبحت $(82\ m/s)$ بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة .

جد : 1) المسافة خلال الثانية الثالثة 2) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 3 ثواني

3) السرعة بعد مرور 10 ثواني

الحل :

$$1)\ V(t) = \int a(t)\,dt \Rightarrow V(t) = \int 18\,dt = 18\,t + c$$

$V(t) = 82$ عندما $t = 4$

$$82 = 18(4) + c \Rightarrow c = 82 - 72 = 10$$

$$V(t) = 18\,t + 10$$

$$d = \int_2^3 (18\,t+10)dt = [9t^2+10\,t]_2^3$$

$$d = [81+30]-[36+20] = 111-56 = 55\ m$$

$$2)\ S = \int_0^3 (18t+10)dt = [9t^2+10t]_0^3 = [81+30]-[0] = 111\ m$$

$$3)\ V(t) = 18t+10 \Rightarrow V(10) = 18(10)+10 = 190\ m/s$$

حل تمارين (4 – 4)

1) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$ ، $x = -1$

الحل : نجعل $y = 0$ لإيجاد نقاط التقاطع

$$x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3-1) = 0$$

$x = 0 \in [-1,1]$ $\qquad$ $x = 1 \in [-1,1]$

$$A = \left|\int_{-1}^0 f(x)dx\right| + \left|\int_0^1 f(x)dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-1}^0 (x^4-x)\,dx\right| + \left|\int_0^1 (x^4-x)dx\right|$$

$$A = \left|[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^{0}\right| + \left|[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}]_{0}^{1}\right| = \left|(0-0) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) - (0-0)\right|$$

$$= \left|\frac{-2-5}{10}\right| + \left|\frac{2-5}{10}\right| = \frac{7}{10} + \frac{3}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

2) جد المساحة المحددة للدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ وعلى الفترة $[-2\,,3]$ ومحور السينات .

الحل : نجعل $f(x) = 0$ لإيجاد نقاط التقاطع

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$$

$$either\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \ \in [-2\,,3]$$

$$or \quad x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$ تهمل

$$x = 2 \in [-2\,,3] \ or\ x = -2 \in [-2\,,3]$$

$$A = \left|\int_{-2}^{2} f(x)dx\right| + \left|\int_{2}^{3} f(x)dx\right|$$

$$A_1 = \left|\int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)dx\right|$$

$$A_1 = [\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x]_{-2}^{2} = \left[\frac{32}{5} - 8 - 8\right] - \left[\frac{-32}{5} + 8 + 8\right] = \frac{64-160}{5} = \frac{-96}{5}$$

$$A_2 = \left|\int_{2}^{3} (x^4 - 3x^2 - 4)dx\right| = [\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x]_{2}^{3}$$

$$A_2 = \left[\frac{243}{5} - 27 - 12\right] - \left[\frac{32}{5} - 8 - 8\right] = \frac{211-115}{5} = \frac{96}{5}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{-96}{5}\right| + \left|\frac{-96}{5}\right| = \frac{192}{5}\ unit^2$$

3) جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات

الحل :

$$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$$

$$either\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$or \qquad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(x^4 - x^2)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^4 - x^2)\,dx\right|$$

$$A_1 = [\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}]_{-1}^{0} + [\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = [0] - \left[\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right] - [0]$$

$$= \left|\frac{-2}{15}\right| + \left|\frac{-2}{15}\right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\ unit^2$$

4) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = sin\,3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

الحل : الفترة موجبة فقط فلا نعوض بالقيم السالبة حيث $n = 0, 1, 2$

$sin\,3x = 0 \qquad 3x = 0 + n\pi$

$n = 0 \qquad x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ لا يجزئ

$n = 1 \qquad x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ يجزئ

$n = 2 \qquad x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ لا يجزئ

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin\,3x\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sin\,3x\,dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{-cos\,3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\right| + \left|\left[\frac{-cos\,3x}{3}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\frac{\left(-cos3(\frac{\pi}{3})\right)}{3} - \frac{(-cos3\,(0))}{3}\right| + \left|\frac{\left(-cos\,3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{3} - \frac{\left(-cos\,3(\frac{\pi}{3})\right)}{3}\right|$$

$$A = \left|\frac{(-cos\,\pi)}{3} - \frac{(-cos\,(0))}{3}\right| + \left|\frac{\left(-cos\,\frac{3\pi}{2}\right)}{3} - \frac{(-cos\,\pi)}{3}\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{-(-1)}{3}\right] - \left[\frac{-1}{3}\right]\right| + \left|[0] - \left[\frac{-(-1)}{3}\right]\right| = \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

5) جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

الحل : نجعل $f(x) = 0$ لإيجاد نقاط التقاطع

$$2\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + n\pi \qquad n = 0 , 1$$

$$n = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$$ يجزئ

$$n = 1 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$$ لا يجزئ

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx\right| = \left|\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} - \frac{\sin 2(0)}{2}\right| + \left|\frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right| + \frac{1}{2}\left|\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}|1 - 0| + \frac{1}{2}|0 - 1| = \frac{1}{2}|1| + \frac{1}{2}|-1| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \ \ unit^2$$

ملاحظة : اذا كانت صيغة الاسئلة كما يأتي :

$$\{y = 1 - 2\sin^2 x \ ,\ y = \cos^2 x - \sin^2 x \ ,\ y = \cos^4 x - \sin^4 x\} = \cos 2x$$

$$\{y = 2\sin^2 x - 1 \ ,\ y = 1 - 2\cos^2 x \ ,\ y = \sin^2 x - \cos^2 x\} = -\cos 2x$$

6) جد المساحة المحددة بالدالتين $y = \frac{1}{2}x$ ، $y = \sqrt{x - 1}$ وعلى الفترة $[2 , 5]$

الحل : نجعل $f(x) = g(x)$ لإيجاد نقاط التقاطع

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x - 1}$$ بتربيع الطرفين

$$\frac{1}{4}x^2 = x - 1 \overset{\times 4}{\Rightarrow} x^2 = 4x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x - 2 = 0$$

$$x = 2 \in [2, 5]$$ لا نجزئ التكامل

$$A = \int_2^5 \left(\frac{1}{2}x - \sqrt{x - 1}\right) dx$$

$$A = \left|\int_2^5 \left[\frac{1}{2}x - (x-1)^{\frac{1}{2}}\right] dx\right| = \left|[\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}]_2^5\right|$$

$$A = \left|\left(\frac{25}{4} - \frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right) - \left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right)\right| = \left|\left(\frac{25}{4} - \frac{16}{3}\right) - \left(1 - \frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{25}{4} - \frac{16}{3} - 1 + \frac{2}{3}\right|$$

$$A = \left|\frac{75 - 64 - 12 + 8}{12}\right| = \frac{7}{12}\ unit^2$$

7) جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^4 - 12$, $y = x^2$

الحل : نجعل $f(x) = g(x)$ لإيجاد نقاط التقاطع

$$x^4 - 12 = x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$$

$either\ \ x = \pm 2 \quad or\ \ x = \pm\sqrt{-3}$ تهمل

$$A = \int_{-2}^{2}(x^4 - x^2 - 12)dx = |[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 12x]_{-2}^{2}|$$

$$A = \left|\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24\right) - \left(\frac{-32}{5} + \frac{8}{3} + 24\right)\right|$$

$$A = |\frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48| = \left|\left(\frac{192 - 80 - 720}{15}\right)\right| = \left|\left(\frac{-608}{15}\right)\right| = \frac{608}{15}\ unit^2$$

8) جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = \sin x$ $g(x) = \sin x \cos x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$

الحل : نجعل $f(x) = g(x)$ لإيجاد نقاط التقاطع

$$h(x) = \sin x \cos x - \sin x \Rightarrow \sin x(\cos x - 1) = 0$$

$either\ \ \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0, 2\pi] \quad x = \pi \in [0, 2\pi] \quad x = 2\pi \in [0, 2\pi]$

$or\ \ \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \in [0, 2\pi] \quad x = 2\pi \in [0, 2\pi]$

$$A = \left|\int_0^{\pi}(\sin x \cos x - \sin x)dx\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x \cos x - \sin x)dx\right|$$

$$A = |[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x]_0^{\pi}| + |[\frac{\sin^2 x}{2} + \cos x]_{\pi}^{2\pi}|$$

$$A = \left|\left[\frac{\sin^2(\pi)}{2} + \cos(\pi)\right] - \left[\frac{\sin^2(0)}{2} + \cos(0)\right]\right| + \left|\left[\frac{\sin^2(2\pi)}{2} + \cos(2\pi)\right] - \left[\frac{\sin^2(\pi)}{2} + \cos(\pi)\right]\right|$$

$A = |[(0-1)-(0+1)]| + |[(0+1)-(0-1)]| = |-1-1| + |1+1| = |-2| + |2|$

$A = 4\ unit^2$

9) جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = 2\sin x + 1$ ، $g(x) = \sin x$ حيث $x \in \left[0 , \frac{3\pi}{2}\right]$

الحل : نجعل $f(x) = g(x)$ لإيجاد نقط التقاطع

$2\sin x + 1 - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \in \left[0 , \frac{3\pi}{2}\right]$

$A = \left|\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + 1)dx\right| = \left|[-\cos x + x]_0^{\frac{3\pi}{2}}\right|$

$A = \left|\left(-\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) - (-\cos(0) + 0)\right| = \left|\left(0 + \frac{3\pi}{2}\right) - (-1)\right| = \left|\frac{3\pi}{2} + 1\right| = \frac{3\pi}{2} + 1\ unit^2$

10) جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات .

الحل : نجعل $y = 0$ لإيجاد نقط التقاطع

$x^3 + 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 4x + 3) = 0$

$x(x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}\ \boxed{x = -1}\ \boxed{x = -3}$

$A = \left|\int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)dx\right| + \left|\int_{-1}^{0} (x^3 + 4x^2 + 3x)dx\right|$

$A = \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right|$

$A = \left|\left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right] - \left[\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2}\right]\right| + \left|(0) - \left[\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right]\right|$

$A = \left|\left[\frac{3 - 16 + 18 - 243 + 432 - 162}{12}\right] - \left[\frac{-3 + 16 - 18}{12}\right]\right|$

$A = \left|\frac{32}{12}\right| + \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{32+5}{12} = \frac{37}{12} = 3\frac{1}{12}\ unit^2$

11) جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = (3t^2 - 6t + 3)m/s$ إحسب

a) المسافة المقطوعة في الفترة $[2 , 4]$ b) الإزاحة في الفترة $[0 , 5]$ وزاري ٢٠١٥ / د١

الحل :

$3t^2 - 6t + 3 = 0\ \ ] \div 3$

$t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-1) = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \notin [2, 4]$

a) $d = |\int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)dt| = |[t^3 - 3t^2 + 3t]_2^4|$

$= |(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)| = |28 - 2| = 26\ m$

b) $s = |\int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)dt| = |[t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5| = (125 - 75 + 15) - (0) = 65\ m$

12) جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t + 12)\ m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $90\ m/s$ إحسب : وزاري ٢٠١٩ / د١ / احيائي

a) السرعة عندما $t = 2$ b) المسافة خلال الفترة $[1, 2]$ c) الازاحة بعد 10 ثواني من بدء الحركة

الحل :

a) $V(t) = \int a(t)dt = \int (4t + 12)dt = 2t^2 + 12t + c$

$90 = 2(16) + 12(4) + c \Rightarrow 90 = 32 + 48 + c \Rightarrow c = 90 - 80 \Rightarrow c = 10$

$V(t) = 2t^2 + 12t + 10 \Rightarrow V(2) = 2(4) + 12(2) + 10 = 8 + 24 + 10 = 42\ m/s$

b) $d = \int_1^2 (2t^2 + 12t + 10)dt = \left|\left[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t\right]_1^2\right| = \left|\left(\frac{16}{3} + 24 + 20\right) - \left(\frac{2}{3} + 6 + 10\right)\right|$

$d = \left|\frac{16}{3} + 44 - \frac{2}{3} - 16\right| = \left|\frac{14}{3} + 28\right| = \frac{14 + 84}{3} = \frac{98}{3}\ m$

c) $s = \int_0^{10} (2t^2 + 12t + 10)dt = \left|\left[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t\right]_0^{10}\right| = \left|\left(\frac{2000}{3} + 600 + 100\right) - (0)\right|$

$s = \frac{2000 + 1800 + 300}{3} = \frac{4100}{3} m$

13) تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100\,t - 6t^2)m/s$ أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الأول الذي بدأت منه ، ثم إحسب التعجيل عندها . وزاري ٢٠١٤/د٢

الحل :

$V(t) = 100\,t - 6t^2$ تكامل الطرفين

$s = \int (100\,t - 6t^2)\,dt \Rightarrow s = 50t^2 - 2t^3 + c$

∵ النقطة تتحرك من السكون ∴ $s = 0\ ,\ t = 0$

$0 = 50(0) - 2(0) + c \Rightarrow c = 0$

$\therefore\ s = 50t^2 - 2t^3$

عند عودة النقطة الى موضعها الأول يعني ان الازاحة (s) تساوي صفر لذا يكون :

$50t^2 - 2t^3 = 0 \Rightarrow t^2(50 - 2t) = 0$

$either \quad t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ يهمل

$or \quad 50 - 2t = 0 \Rightarrow 2t = 50 \Rightarrow t = 25 \ sec$ الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الأول

$a(t) = \acute{V}(t)$ التعجيل

$a(t) = 100 - 12\,t$

$a(25) = 100 - 12(25) = 100 - 300 = -200\ m/s^2$

الحجوم الدورانية

١- لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y = f(x)$ المستمرة من $a = x$ الى $x = b$ حول محور السينات نطبق العلاقة $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

٢- لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $x = f(y)$ المستمرة من $y = b$ الى $y = a$ حول محور الصادات نطبق العلاقة $V = \pi \int_a^b x^2\, dy$

مثال : المنطقة المحددة بين المنحني $y = \sqrt{x}\,, 0 \le x \le 4$ ومحور السينات دارت حول محور السينات جد حجمها .

الحل :

$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2\, dx = \pi \int_0^4 x\, dx = [\pi \frac{x^2}{2}]_0^4 = 8\pi - 0 = 8\pi$ وحدة مكعبة

مثال : المنطقة المحددة بين المنحني $1 \le y \le 4$, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول محور الصادات جد حجمها .

الحل :

$V = \pi \int_1^4 x^2\, dy = \pi \int_1^4 (\frac{1}{\sqrt{y}})^2\, dy = \pi \int_1^4 \frac{1}{y} dy = \pi\, [ln\, y]_1^4 = \pi\, [ln\, 4 - ln1] = 2\pi ln2$ وحدة مكعبة

مثال : جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $f(x) = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول محور الصادات دورة كاملة .

الحل : نجد التقاطع مع y بوضع $x = 0$

$y = 0 + 1 \Rightarrow y = 1 \quad , \quad [1, 4]$

$$V = \pi \int_1^4 x^2\, dy$$

$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$

$V = \pi \int_1^4 (y - 1)\, dy = \pi [\frac{y^2}{2} - y]_1^4 = \pi \left[\frac{16}{2} - 4\right] - \left[\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{9}{2}\pi$ وحدة مكعبة

مثال : اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $x = 2y^2$ ومحور الصادات ضمن الفترة $y = 2 , y = 0$

الحل :

$$x = 2y^2 \xRightarrow{\text{بالتربيع}} x^2 = 4y^4$$

$$V = \pi \int_a^b x^2\,dy = \pi \int_0^2 x^2\,dy$$

$$V = \pi \int_0^2 4y^4\,dy = 4\pi[\frac{y^5}{5}]_0^2 = 4\pi\left[\frac{(2)^5}{5} - \frac{0}{5}\right] = 4\pi\left[\frac{32}{5}\right] = \frac{128\pi}{5}$$ وحدة مكعبة

مثال : اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 2 , x = 0$ حول المحور السيني .

الحل :

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^2 8x\,dx = 4\pi[x^2]_0^2 = 4\pi[4 - 0] = 16\pi$$ وحدة مكعبة

مثال : اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالمقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 0 , x = 5$ حول المحور السيني .

الحل :

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_0^5 (2x^2)^2\,dx = 4\pi \int_0^5 x^4\,dx = 4\pi[\frac{x^5}{5}]_0^5$$

$$V = \frac{4\pi}{5}[x^5]_0^5 = \frac{4\pi}{5}[(5)^5 - (0)^5] = \frac{4\pi}{5}[3125 - 0] = 2500\pi$$ وحدة مكعبة

مثال : اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالمقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 16 , y = 0$ حول المحور الصادي .

الحل :

$$y = 4x^2 \Longrightarrow x^2 = \frac{y}{4}$$

$$V = \pi \int_a^b x^2\,dy = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4}\,dy = \frac{\pi}{4}[\frac{y^2}{2}]_0^{16} = \pi\left[\frac{(16)^2}{8} - 0\right] = 32\pi$$ وحدة مكعبة

مثال : اوجد حجم المنطقة المحصورة بين منحني الدالة $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $y = 2 , y = 1$ ومحور الصادات دورة كاملة حول المحور الصادي .

الحل :

$$V = \pi \int_a^b x^2\,dy \qquad x = \frac{1}{y} \xRightarrow{\text{بالتربيع}} x^2 = \frac{1}{y^2}$$

$$V = \pi \int_1^2 \frac{1}{y^2}\,dy = \pi[\frac{-1}{y}]_1^2 = \pi\left[\frac{-1}{2} + 1\right] = \frac{\pi}{2}$$ وحدة مكعبة

مثال : اوجد الحجم الناشيء من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{3}{x}$ ، $1 \le y \le 3$ ، دورة كاملة حول المحور الصادي .

الحل :

$$x = \frac{1}{y} \xRightarrow{\text{بالتربيع}} x^2 = \frac{1}{y^2}$$

$$V = \pi \int_a^b x^2 \ dy$$

$$V = \pi \int_1^3 (\frac{3}{y})^2 \ dy = 9\pi[\frac{-1}{y}]_1^3 = 9\pi\left[\frac{-1}{3} + 1\right] = 6\pi$$ وحدة مكعبة

حل تمارين (5 – 4)

س1 : أوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 2$, $x = 1$ حول المحور السيني .

الحل :

$$V = \pi \int_a^b y^2 \ dx = \pi \int_1^2 (x^2)^2 \ dx = \pi \int_1^2 x^4 \ dx = \pi\ [\frac{x^5}{5}]_1^2 = \pi\left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right] = \frac{31}{5}\pi$$ وحدة مكعبة

س2 : أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي . وزاري ٢٠١٣ / د١

الحل :

$$x = 0 \implies y = 1$$

$$\because y = x^2 + 1 \implies x^2 = y - 1$$

$$V = \pi \int_a^b x^2 \ dy = \pi \int_1^4 (y-1) \ dy = \pi\ [\frac{y^2}{2} - y]_1^4$$

$$= \pi\left[(8-4) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \pi\left[4 + \frac{1}{2}\right] = 4\frac{1}{2}\pi$$ وحدة مكعبة

س3 : إحسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحنى $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x = 0$ حول المحور الصادي .

الحل :

$$y^2 + x = 1 \implies x = 1 - y^2$$

$$x = 0 \implies y^2 = 1 \implies y = \pm 1$$ حدود التكامل

$$V = \pi \int_a^b x^2 \ dy = \pi \int_{-1}^1 (1-y^2)^2 \ dy = \pi \int_{-1}^1 (1 - 2y^2 + y^4) \ dy$$

$$V = \pi\ [y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}]_{-1}^1 = \pi\left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)\right] = \pi\left[2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right]$$

$$V = \frac{30-20+6}{15}\pi = \frac{16}{15}\pi$$ وحدة مكعبة

س4 : أحسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمان $x = 0\ ,\ x = 2$ حول المحور السيني . وزاري ٢٠١٤ / د٢

الحل :

$$V = \pi \int_a^b y^2\ dx = \pi \int_0^2 x^3\ dx = \pi\ [\tfrac{x^4}{4}]_0^2 = \pi\ \left[\tfrac{16}{4} - 0\right] = 4\pi$$ وحدة مكعبة

حل الاسئلة الوزارية حول التكامل

س / جد ناتج كل مما يأتي :

1) $\int (sinx - 3\ sec^2x\ )dx = -cos\ x - 3\ tanx\ +\ c$ وزاري ١٩٩٦ / د١

2) $$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\ dx = \int_0^3 (1+x)^{-\frac{1}{2}}\ dx = \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3$$

$$= \left[2\ \sqrt{1+x}\right]_0^3 = [2\sqrt{4}] - [\ 2\sqrt{1}] = 4 - 2 = 2$$

3) $$\int cos\ 6x\ cos\ 3x\ dx = \int (1 - 2sin^2 3x)\ cos3x\ dx$$

$$= \int cos\ 3x\ dx - 2\ \int sin^2 3x\ cos\ 3x\ dx$$

$$= \frac{1}{3}\int cos\ 3x\ (3)\ dx - \frac{2}{3}\int sin^2 3x\ cos\ 3x\ (3)dx$$

$$= \frac{1}{3}\ sin\ 3x - \frac{2}{3}\ .\frac{sin^3 3x}{3} + c = \frac{1}{3}\ sin\ 3x - \frac{2}{9} sin^3 3x + c$$

4) $\int (sec\ x - sin\ x)(sec\ x + sin\ x)dx$ وزاري ١٩٩٦ / د٢

$$= \int (sec^2x - \ sin^2x)dx = \int sec^2x\ dx - \frac{1}{2}\int (1 - cos\ 2x)dx$$

$$= \ tan\ x - \tfrac{1}{2}\left(x\ - \tfrac{1}{2}\ sin\ 2x\right) + c = tan\ x - \tfrac{1}{2}\ x + \tfrac{1}{4}\ sin\ 2x + c$$

5) $\int_4^8 x\ \sqrt{x^2 - 15}\ \ dx = \int_4^8 x\ (x^2 - 15)^{\frac{1}{2}} dx$ وزاري ١٩٩٧ / د١

$$= \tfrac{1}{2}\int_4^8 2x\ (x^2 - 15)^{\frac{1}{2}} dx = [\tfrac{1}{2}\ .\frac{(x^2-15)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}]_4^8 = [\tfrac{1}{3}\ .(x^2 - 15)^{\frac{3}{2}}]_4^8$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}(64 - 15)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\tfrac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\tfrac{1}{3}(49)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\tfrac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\tfrac{1}{3}(7^2)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\tfrac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{343}{3} - \frac{1}{3} = \frac{342}{3} = 114$$

6) $$\int cos\ 2x\ sin^2x\ dx = \int cos2x\ .\frac{1}{2}(1 - cos\ 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int \cos 2x(2)dx - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \cos 2x(2)\,dx - \frac{1}{4}[\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 4x\,(4)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + c$$

$7)\ \int(1+\cos 3x)^2\,dx = \int(1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x)dx$ وزاري ١٩٩٧ / د٢

$$= \int dx + 2\int \cos 3x\,dx + \frac{1}{2}\int (1+\sin 6x)\,dx$$

$$= \int dx + 2\int \cos 3x\,dx + \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{6}\int \sin 6x\,(6)\,dx\right]$$

$$= x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

$8)\ \int(\cos x - \sin 2x)^2\,dx = \int(\cos^2 x - 2\cos x\sin 2x + \sin^2 2x)$ وزاري ١٩٩٨ / د١

$$= \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx - 2\int \cos x\,.(2\sin x\cos x)dx + \frac{1}{2}\int(1-\cos 4x)dx$$

$$= \frac{1}{2}[\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,(2)\,dx] + 4\int \cos^2 x\,(-\sin x)dx + \frac{1}{2}[\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 4x\,(4)\,dx]$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + 4\,.\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}\cos^3 x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

$$= x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

س / اذا كان $\int_{-1}^{a}(x - x^3)dx = \frac{-9}{4}$ ما قيمة $a \in R^+$ ؟ وزاري ١٩٩٨ / د١

الحل :

$$\int_{-1}^{a}(x - x^3)dx = \frac{-9}{4} \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{a} = \frac{-9}{4} \Rightarrow \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4}\right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right] = \frac{-9}{4}$$

$$\frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-9}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{-9}{4} \xrightarrow{(\times -4)} -2a^2 + a^4 + 1 = 9$$

$$a^4 - 2a^2 + 1 - 9 = 0 \Rightarrow a^4 - 2a^2 - 8 = 0$$

$$(a^2 - 4)(a^2 + 2) = 0 \Rightarrow (a^2 - 4) = 0$$

$either\ \ a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$or\ \ \ a^2 + 2 = 0$ تهمل

س / اذا كان $\int_a^b (2x+3)dx = 12$ وكان $a + 2b = 3$ ما قيمة $a , b \in R$ ؟ وزاري ١٩٩٨ /د٢

الحل :

$$a = 3 - 2b \; ....\; (1)$$

$$\int_a^b (2x+3)dx = 12 \Rightarrow [x^2+3x]_a^b = 12 \Rightarrow [b^2+3b]-[a^2+3a] = 12$$

$$b^2+3b-(3-2b)^2-3(3-2b) = 12$$

$$b^2+3b-(9-12b+4b^2)-9+6b-12 = 0$$

$$b^2+3b-9+12b-4b^2-9+6b-12 = 0$$

$$[-3b^2+21b-30=0] \div -3 \Rightarrow b^2-7b+10 = 0$$

$$(b-5)(b-2) = 0$$

$$either \;\; b-2=0 \Rightarrow \boxed{b=2} \Rightarrow a = 3-2(2) \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

$$or \;\; b-5=0 \Rightarrow \boxed{b=5} \Rightarrow a = 3-2(5) \Rightarrow \boxed{a=-7}$$

س / جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ ومحور السينات وعلى $[0, \frac{\pi}{2}]$.

الحل : وزاري ٢٠٠٠ / د٢

$$1-2\sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

الفترات $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}\sin 0\right]\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin\pi\right]-\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0)-\frac{1}{2}(1)\right| = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1\; unit^2$$

س / جد ناتج ما يأتي :

وزاري ٢٠٠١ / د١

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int [\sin x \cos x]^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(2\sin x \cos x)\right]^2 dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]^2 dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 4x\,(4)dx\right] = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

س / جد ناتج ما يأتي :

وزاري ٢٠٠١ / د١

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{9-12x+4x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(3-2x)^2} = \int_{-1}^{1} (3-2x)^{-2}\, dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int_{-1}^{1}(3-2x)^{-2}.(-2)dx$$

$$= \left[\frac{-1}{2}.\frac{(3-2x)^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{2(3-2x)}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{2(1)}\right] - \left[\frac{1}{2\,(5)}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{5-1}{10} = \frac{2}{5}$$

س / جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = x^3 - 9x$ ومحور السينات والفترة $[-3\,,3]$ ؛ وزاري ٢٠٠١ / د١

الحل :

$$x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x\,(x^2-9) = 0$$

$$either \quad x = 0$$

$$or\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \in [-3\,,3]$$

$$A = |\int_{-3}^{0}(x^3 - 9x)\,dx| + |\int_{0}^{3}(x^3 - 9x)\,dx| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right|$$

$$= \left|[0] - \left[\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right]\right| + \left|\left[\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right] - [0]\right|$$

$$= \left|\frac{-81}{4} + \frac{81}{2}\right| + \left|\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right| = \left|\frac{-81+162}{4}\right| + \left|\frac{81-162}{4}\right| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{162}{4} = 40\frac{1}{2}\,unit^2$$

س / جد قيمة ما يأتي : $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\,(2x+5)dx$ وزاري ٢٠٠١ / د١

الحل :

$$= \int_0^4 (x^2+5x)^{\frac{1}{2}}(2x+5)dx = \left[\frac{(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \left[\frac{2}{3}(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{2}{3}(16+20)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\frac{2}{3}(6^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(216) = \frac{432}{3} = 144$$

س / جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = x^4 - 4$ ، $y = 3x^2$ وزاري ٢٠٠٢ / د١

الحل :

$$x^4 - 4 = 3x^2 \Rightarrow h(x) = x^4 - 3x^2 - 4 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$(x^2-4)(x^2+1) = 0$$

$$either\ (x^2-4) = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$or \quad (x^2+1) = 0$ تهمل

$$A = \left|\int_{-2}^{2}(x^4 - 3x^2 - 4)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{32}{5} - 8 - 8\right] - \left[\frac{-32}{5} + 8 + 8\right]\right| = \left|\frac{64}{5} - 32\right| = \frac{96}{5}\,unit^2$$



س / جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = x^2$ ، $y = 2x$ وعلى الفترة $[1 , 3]$ وزاري ٢٠٠٢ / د١

الحل :

$$h(x) = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

$$either \; x = 0 \notin [1 , 3]$$

$$or \; x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \in [1 , 3]$$

$$\therefore A = |\int_1^2 (x^2 - 2x)\,dx| + |\int_2^3 (x^2 - 2x)\,dx| = \left|[\frac{x^3}{3} - x^2]_1^2 + [\frac{x^3}{3} - x^2]_2^3\right|$$

$$= \left|\left[\frac{8}{3} - 4\right] - \left[\frac{1}{3} - 1\right]\right| + |[9 - 9] - [\frac{8}{3} - 4]|$$

$$= \left|\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1\right| + \left|-\frac{8}{3} + 4\right| = \left|\frac{7}{3} - 3\right| + \left|\frac{-8+12}{3}\right| = \left|\frac{7-9}{3}\right| + \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2\; unit^2$$

س / اذا كان $\int_h^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2$ جد قيمة h وزاري ٢٠٠٤ / د١

الحل :

$$\int_h^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2 \Rightarrow \int_h^4 x\,(x^2+9)^{\frac{-1}{2}}\,dx = 2$$

$$\frac{1}{2}\int_h^4 2x\,(x^2+9)^{\frac{-1}{2}}\,dx = 2 \Rightarrow [\frac{1}{2}\frac{(x^2+9)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}]_h^4 = 2 \Rightarrow [\sqrt{x^2+9}]_h^4 = 2$$

$$[\sqrt{16+9}] - [\sqrt{h^2+9}] = 2 \Rightarrow \sqrt{25} - \sqrt{h^2+9} = 2$$

$$\sqrt{h^2+9} = 5 - 2 \Rightarrow \sqrt{h^2+9} = 3$$ بالتربيع

$$h^2 + 9 = 9 \Rightarrow h^2 = 0 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} h = 0$$

س / جد قيمة $\int_1^2 \frac{dx}{(5-2x)^2}$ وزاري ٢٠٠٦ / د١

الحل :

$$\int_1^2 (5-2x)^{-2}\,dx = \frac{-1}{2}\int_1^2 (5-2x)^{-2}\,(-2)dx = [\frac{-1}{2} . \frac{(5-2x)^{-1}}{-1}]_1^2$$

$$= [\frac{1}{2(5-2x)}]_1^2 = \left[\frac{1}{2(5-4)}\right] - \left[\frac{1}{2(5-2)}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

س / جد قيمة $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$ وزاري ٢٠٠٦ / د٢

الحل :

$$= \int_1^2 (3x-4)^{-2}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^2 (3x-4)^{-2}\,(3)\,dx = [\frac{1}{3} . \frac{(3x-4)^{-1}}{-1}]_1^2$$

$$= [\frac{-1}{3(3x-4)}]_1^2 = \left[\frac{-1}{3(6-4)}\right] - \left[\frac{-1}{3(3-4)}\right] = \frac{-1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{-1-2}{6} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

س / اذا كان $\int_a^b f(x)\,dx = 5$ ، $\int_c^b f(x)\,dx = 3$ وكانت $c \in [a\,,b]$ ، جد قيمة $\int_a^c f(x)\,dx$

الحل : وزاري ٢٠٠٨ / ١د

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \Rightarrow 5 = \int_a^c f(x)\,dx + 3$$

$$\therefore \int_a^c f(x)\,dx = 5 - 3 \Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx = 2$$

س / جد $\int \cos^2 2x \sin x\,dx$ وزاري ٢٠٠٨ / ١د

الحل :

$$= \int (2\cos^2 x - 1)^2 \sin x\,dx = \int (4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) \sin x\,dx$$

$$= -4\int \cos^4 x\,(-\sin x)dx + 4\int \cos^2 x\,.(-\sin x)dx + \int \sin x\,dx$$

$$= -4\,\frac{\cos^5 x}{5} + 4\,.\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c = \frac{-4}{5}\cos^5 x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \cos x + c$$

س / جسم يتحرك بسرعة $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ في اي زمن t احسب : وزاري ٢٠٠٩ / ١د

1) المسافة المقطوعة خلال الفترة $[0\,,2]$ 2) الزمن الذي يصبح فيه التعجيل $18\ m\backslash min^2$

الحل :

$$1)\ [3t^2 - 12t + 9 = 0] \div 3 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-3)(t-1) = 0$$

$$either\ \ t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3 \notin [0,2]$$

$$or\ \ t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \in [0,2]$$

$$\therefore d = \left|\int_0^1 (3t^2 - 12t + 9)dt\right| + \left|\int_1^2 (3t^2 - 12t + 9)dt\right|$$

$$= \left|[t^3 - 6t^2 + 9t]_0^1\right| + \left|[t^3 - 6t^2 + 9t]_1^2\right|$$

$$= |[1 - 6 + 9] - [0]| + |[8 - 24 + 18] - [1 - 6 + 9]|$$

$$= |4| + |2 - 4| = 4 + 2 = 6\,m$$

$$2)\ a(t) = V'(t) = 6t - 12$$

$$18 = 6t - 12 \Rightarrow 6t = 18 + 12 \Rightarrow 6t = 30 \Rightarrow t = 5\,min$$

س / جد قيمة $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}\,dx$ وزاري ٢٠٠٩ / ٢د

$$= \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}}\,dx = \int_3^8 \frac{x}{x\,(x+1)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_3^8 (x+1)^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$= \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_3^8 = \left[2\sqrt{x+1}\right]_3^8 = \left[2\sqrt{8+1}\right] - \left[2\sqrt{3+1}\right]$$

$$= [2\,(3)] - [2(2)] = 6 - 4 = 2$$

س / جد المساحة المحددة بين المنحنيين : $y = \cos^2 x$ ، $y = \sin^2 x$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$. وزاري ٢٠٠٩ / د٢

الحل :

$$h(x) = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow h(x) = \cos 2x$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\therefore A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx\right| = \left|[\tfrac{1}{2}\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|[\tfrac{1}{2}\sin 2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|\left[\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{2}\right] - \left[\tfrac{1}{2}\sin 0\right]\right| + \left|\left[\tfrac{1}{2}\sin\pi\right] - \left[\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{2}\right]\right|$$

$$= \left|\tfrac{1}{2}(1) - \tfrac{1}{2}(0)\right| + \left|\tfrac{1}{2}(0) - \tfrac{1}{2}(1)\right| = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1$$ وحدة مربعة

س / جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = 3t^2 + 4t + 7 m/s$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة ثم جد التعجيل عندها . وزاري ٢٠١٠ / د٢

الحل : المسافة المقطوعة بعد مرور t ثانية من بدء الحركة تكون الفترة $[0, t]$

$$v(t) = 3t^2 + 4t + 7 \Rightarrow 3t^2 + 4t + 7 \neq 0$$

$$d = \int_0^4 (3t^2 + 4t + 7)dt$$

$$d = \left|[\frac{3t^3}{3} + \frac{4t^2}{2} + 7t]_0^4\right| = |[t^3 + 2t^2 + 7t]_0^4| = |[(4)^3 + 2(4)^2 + 7(4)] - [0]|$$

$$d = |64 + 32 + 28| = 124\, m$$

$$a(t) = V'(t) = 6t + 4 \Rightarrow a(4) = 6(4) + 4 = 28 \frac{m}{s^2}$$

س / جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = (x-1)^3$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 3]$. وزاري ٢٠١٢ / د١

الحل :

$$(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [-1, 3]$$

$$A = \left|\int_{-1}^{1}(x-1)^3\, dx\right| + \left|\int_1^3 (x-1)^3 dx\right| = \left|[\tfrac{(x-1)^4}{4}]_{-1}^{1}\right| + \left|[\tfrac{(x-1)^4}{4}]_1^3\right|$$

$$= \left|[0 - \tfrac{(-2)^4}{4}]\right| + \left|[\tfrac{(2)^4}{4} - 0]\right| = -4| + |4| = 8\, unit^2$$

س / جد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين $y = x^2 + 1$ والمستقيمين $y = 2$ ، $y = 1$ حول المحور الصادي

الحل : وزاري ٢٠١٢ / د١

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$$

$$v = \pi \int_a^b x^2\, dy \Rightarrow \pi \int_1^2 (y-1)\, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^2$$

$$= \pi \left[\frac{4}{2} - 2\right] - \left[\frac{1}{2} - 1\right] = \pi\,(2-2) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$ وحدة مكعبة

حل التمارين العامة الخاصة بالفصل الرابع

س12/ جد تكاملات كلاً مما يأتي :

a) $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\,dx$ نحلل فرق بين مربعين

$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx$$

$\boxed{\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x}$ $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2x\,.(2)\,dx = \frac{\sin 2x}{2} + c$$

b) $\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2)\,dx$

$$= \int (\sin 2x \cos^2 2x + 2\sin 2x - \cos^2 2x - 2)\,dx$$

$$= \int [(\cos 2x)^2 \sin 2x + 2\sin 2x - \cos^2 2x - 2]\,dx$$

$\boxed{-2\sin 2x = \text{المشتقة}}$ $\boxed{\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)}$

$$= \int \left[-\frac{1}{2}(\cos 2x)^2 .(-2\sin 2x) + \sin 2x\,(2) - \frac{1}{2}(1+\cos 4x) - 2\right] dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(\cos 2x)^3}{3} - \cos 2x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) - 2x + c$$

$$= -\frac{(\cos 2x)^3}{6} - \cos 2x - \frac{1}{2}x + \frac{\sin 4x}{8} - 2x + c$$

$$= -\frac{(\cos 2x)^3}{6} - \cos 2x - \frac{5}{2}x + \frac{\sin 4x}{8} + c$$

c) $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int \ln x\,.\underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{مشتقة الـ } \ln}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$

d) $\int \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

$$= 2\int \frac{\sin x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx = 2\int \sin x^{\frac{1}{3}}\, x^{-\frac{2}{3}}\,dx$$ $\boxed{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \text{مشتقة الزاوية}}$

$$= 3\,(2)\int \sin x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)dx = 6\left(-\cos x^{\frac{1}{3}}\right) + c = -6\cos\sqrt[3]{x} + c$$

e) $\int \cot x \csc^3 x\, dx$

$= \int (\csc x)^3 \cot x\, dx$ 　　 $\csc$ مشتقة $= -\csc x . \cot x$

$= -\int (\csc x)^2 (-\csc x . \cot x) dx = -\frac{(\csc x)^3}{3} + c$

f) $\int \sqrt[3]{3x^3 - 5x^5}\, dx$

$= \int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\, dx$

$= \int x \sqrt[3]{(3-5x^2)}\, dx$

$= \int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}} x\, dx = -\frac{1}{10} \int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}} (-10x)\, dx$

$= -\frac{1}{10} \frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = -\frac{3}{40} (3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + c$

g) $\int \frac{1}{x^2 - 14x + 49}\, dx$ 　　 نحلل المقام مربع كامل

$\int \frac{1}{(x-7)^2}\, dx = \int (x-7)^{-2} = \frac{(x-7)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{-(x-7)} + c$

h) $\int \sec^2 3x . e^{\tan 3x}\, dx = \int e^{\tan 3x} . \sec^2 3x\, dx = \frac{1}{3} \int e^{\tan 3x} . (3\sec^2 3x)\, dx$

$= \frac{1}{3} e^{\tan 3x} + c$ 　　 وزاري ٢٠١٩ / د١ / احيائي

تذكير ببعض قوانين الدوال المثلثية

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\cos 2x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$ $\cos 2x = (1 - 2\sin^2 x)$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$	$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$	$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\csc x = \frac{1}{\sin x}$ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$


الفصل الخامس
المعادلات التفاضلية
الاعتيادية
الاستاذ محمد حميد

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

المعادلة التفاضلية الاعتيادية : هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة او اكثر للدالة المجهولة في المعادلة (اي للمتغير التابع في المعادلة)

ملاحظة : ان المعادلة التفاضلية الاعتيادية هي علاقة بين متغيرين (المتغير الأول متغير مستقل وليكن (x) ودالة غير معرفة ولتكن مثلا (y) وبعض مشتقات الدالة (y) بالنسبة للمتغير (x)) مثلا

$$\frac{dy}{dx} = 3y - 4x$$

$$x^2\, y'' + 5xy' - x^3 y = 0$$

$$y' + x^2 y + x = y$$

$$y^4 + \cos y + x^2\, y\, y' = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = y - 4$$

$$(y'')^2 + 2y' + x^2\ \ln x = 5$$

معادلات تفاضلية إعتيادية لأن المتغير (y) يعتمد فقط على المتغير (x)

درجة المعادلة التفاضلية : وهي اكبر قوة (أس) مرفوعة له اعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية .

رتبة المعادلة التفاضلية : وهي رتبة أعلى مشتقة موجودة في المعادلة التفاضلية .

$\frac{dy}{dx} + x - 7y = 0$ من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

$\frac{d^2y}{dx^2} = 5x - 3x\, y + 7$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

$(y''')^3 + y' - y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثالثة

$y'' + 2y\,(y')^3 = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى

$(\frac{dy}{dx})^4 = x^3 - 5$ من الرتبة الاولى والدرجة الرابعة

$x^2 (\frac{dy}{dx})^4 + (\frac{d^3y}{dx^3})^2 + 2\, \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية

$y^{(4)} + \cos y + x^2\, yy' = 0$ من الرتبة الرابعة والدرجة الاولى

ملاحظة : درجة المعادلة التفاضلية التي تكون جبرية في مشتقاتها هي الدرجة الجبرية للمشتقة ذات اعلى مرتبة تظهر في المعادلة $(y'')^2 = \sqrt{1 + (y')2}$ من الرتبة الثانية لأن اعلى مشتقة فيها y'' حيث يمكن ازالة الاسس الكسرية والجذور ونحصل $(y'')^4 = 1 + (y')^2$ بذلك تكون درجة المعادلة الرابعة .

حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية

حل المعادلة التفاضلية هو اية علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث ان هذه العلاقة :

أ) **خالية من المشتقة .**

ب) **معرفة على فترة معينة .**

ج) **تحقق المعادلة التفاضلية .**

اي دالة مجهولة بدلالة متغير مستقل تحقق المعادلة التفاضلية .

مثال : بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً للمعادلة $xy' = x^2 + y$

الحل :

$$y = x^2 + 3x \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y' = 2x + 3 \ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض (1) و (2) في الطرف الايمن والايسر للمعادلة التفاضلية :

$$LHS = xy' = x(2x+3) = 2x^2 + 3x$$

$$RHS = x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x = 2x^2 + 3$$

العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية اعلاه

الحل الخاص والعام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية

ان حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية هو علاقة بين y, x تحقق المعادلة غير ان الحل العام لأي معادلة تفاضلية هو الحل المشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مساوٍ لرتبة المعادلة ، فاذا كانت المعادلة من الرتبة الاولى وجب ان يكون حلها مشتملاً على ثابت اختياري واحد (هو ثابت التكامل) الذي يظهر عند اجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الاولى . اما اذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب ان يكون حلها مشتملا على (ثابتي التكامل) نظرا لأجراء خطوتي تكامل عند حل معادلة الرتبة الثانية وهكذا بالنسبة للمعادلات التي لها رتبة أعلى .

مثال : اثبت ان $y = x\,lnx - x$ احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y \ , \ x > 0$

الحل :

$$y = xlnx - x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + ln\,x(1) - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + ln\,x - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ln\,x$$

$$L.H.S = x\frac{dy}{dx} = xln\,x$$

$$R.H.S = x + y = x + x\,ln\,x - x = x\,lnx \qquad L.H.S = R.H.S$$

$\therefore$ الدالة المعطاة هي احد الحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية أعلاه

مثال : بين ان $lny^2 = x + a \;,\; a \in R$ حلاً للمعادلة $2y' - y = 0$

الحل :

$$lny^2 = x + a \Rightarrow 2\,lny = x + a \Rightarrow 2\left(\frac{y'}{y}\right) = 1 \Rightarrow 2y' = y \Rightarrow 2y' - y = 0$$

$\therefore$ $lny^2 = x + a$ هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

مثال : هل $y = x^3 + x - 2$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ ؟

الحل :

$$y = x^3 + x - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

$\therefore$ $y = x^3 + x - 2$ هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

مثال : هل ان $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلاً للمعادلة $yy'' + (y')^2 - 3x = 5$ ؟

الحل :

$$y^2 = 3x^2 + x^3 \Rightarrow 2yy' = 6x + 3x^2 \Rightarrow [2y(y'') + y'(2)y' = 6 + 6x] \div 2$$

$$y(y'') + (y')^2 = 3 + 3x = L.H.S \Rightarrow y(y'') + (y')^2 - 3x = 3 \neq R.H.S$$

$\therefore$ $y^2 = 3x^2 + x^3$ ليست حل للمعادلة أعلاه

مثال : برهن ان $y = 3cos\,2x + 2sin\,2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

الحل :

$$y = 3cos2x + 2sin\,2x \;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y' = -3sin2x\,(2) + 2\,cos2x\,(2) = -6sin2x + 4\,cos2x$$

$$y'' = -12cos2x - 8sin2x \;\ldots\ldots\ldots(2)$$

بالتعويض عن (1) و (2) في الطرف الايسر للمعادلة التفاضلية ينتج :

$$L.H.S = (-12\,cos\,2x - 8\,sin2x) + 4\,(3cos2x + 2sin\,2x)$$

$$= -12cos2x - 8sin2x + 12\,cos2x + 8sin\,2x = 0 = R.H.S$$

$\therefore$ $y = 3cos\,2x + 2sin\,2x$ هي حل للمعادلة أعلاه

مثال : بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$

الحل :

$$y = e^{2x} + e^{-3x} \Rightarrow y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x} \Rightarrow y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$

$$L.H.S = y'' + y' - 6y$$

$= (4e^{2x} + 9e^{-3x}) + (2e^{2x} - 3e^{-3x}) - 6(e^{2x} + e^{-3x})$

$= 4\,e^{2x} + 9\,e^{-3x} + 2\,e^{2x} - 3\,e^{-3x} - 6\,e^{2x} - 6\,e^{-3x} = 0 = R.H.S$

$\therefore y = e^{2x} + e^{-3x}$ هي حل للمعادلة أعلاه

مثال : هل ان المعادلة $y = 3e^{-2x}$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' = 2y$ ؟

الحل :

$y = 3e^{-2x}$

$y' = 3e^{-2x}(-2) = -6e^{-2x}$ نجد المشتقة الاولى

$y'' = 12e^{-2x}$ نجد المشتقة الثانية

$L.H.S = y'' + y' = 12\,e^{-2x} + (-6e^{-2x}) = 6e^{-2x}$

$R.H.S = 2y = 2(3e^{-2x}) = 6e^{-2x}$ $\quad L.H.S = R.H.S$

$\therefore y = 3e^{-2x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

مثال : هل العلاقة $y = cos^2x - sin^2x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$ ؟

الحل : لدينا $cos2x = cos^2x - sin^2x$

$y = cos2x \Rightarrow y' = -2\sin 2x$

$y'' = -2(cos2x\,(2)) = -4\,cos2x$

$L.H.S. = y'' + 4y = -4\,cos2x + 4\,cos2x = 0$

$\therefore y = cos^2x - sin^2x$ هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

س : واجب : هل ان المعادلة $xy = cos2x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $xy'' + 2y' = -4xy$

س : واجب : هل ان المعادلة $y^2 = x^4 + x^3 + x^2$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 = 6x^2 + 3x + 1$

حل تمارين (5 – 1)

س1 : بين درجة ورتبة كل من المعادلات التفاضلية التالية :

$1 - (x^2 - y^2) + 3xy\,\frac{dy}{dx} = 0$ درجة اولى رتبة أولى

$2 - \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 5y = 7$ درجة اولى رتبة ثانية

$3 - (y''')^3 - 2y' + 8y = x^3 + cos\,x$ درجة ثالثة رتبة ثالثة

$4-(\frac{d^3y}{dx^3})^2-2\,(\frac{dy}{dx})^5+3y=0$ درجة ثانية رتبة ثانية

س2 : برهن ان $y=sinx$ هو حل للمعادلة $y''+y=0$

الحل :

$$y=\ sin\,x \Rightarrow y'=cos\,x\ \Rightarrow y''=-\,sin\,x$$

$$L.H.S=\ y''+y=\ -\,sin\,x+sin\,x=0\ =R\,.H\,.S$$

$\therefore$ $y=sinx$ هي حل للمعادلة أعلاه

س3 : برهن أن العلاقة $s=8\,cos\,3t\ +\ 6sin\,3t$ هي حل للمعادلة $\frac{d^2s}{dt^2}+9\,s=0$

الحل :

$$s=8\,cos\,(3t)+\ 6\,sin\,(3t)$$

$$\frac{ds}{dt}=8(-sin3t\,)(3)+6\,(cos3t\,)(3)=-24sin\,3t+18\,cos\,3t$$

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-24\,cos(3t)\,(3)+18\,(-\,sin\,3t)\,(3)\ =-72\,cos\,3t-54\,sin\,3t$$

$$L.H.S\ =\frac{d^2s}{dt^2}+\ 9s\ =-72\,cos\,3t-\ 54sin\,3t+\ 9\,(8\,cos\,3t\ +\ 6\,sin\,3t\,)$$

$$L.H.S\ =-72\,cos\,3t\ -54\,cos\,3t\ +\ 72\,cos\,3t\ +\ 54sin3t\ =0=R\,.H\,.S$$

$\therefore$ العلاقة $s=8\,cos\,3t\ +\ 6sin\,3t$ هي حلاً للمعادلة أعلاه

س4 : هل ان $y=x+2$ حلاً للمعادلة $y''+3y'+y=x$ ؟

الحل :

$$y=\ x+2\ \Rightarrow y'=1\Rightarrow y''=0$$

$$L.H.S=y''+3y'+y\ =0+3(1)+x\ +2=3+x+2=x+5\ \neq\ x$$

$\therefore$ $y=x+2$ ليست حلاً للمعادلة أعلاه $L.H.S\ \neq\ R.H.S$

س5 : هل $y=tanx$ حلاً للمعادلة $y''=2y(1+y^2)$ ؟

الحل :

$$y=tan\,x\ \Rightarrow y'=sec^2x$$

$$y''=2secx(sec\,x\,tan\,x)=2sec^2x\,.tan\,x=L.H.S$$

$$R.H.S=2y\,(1+y^2)=2tanx\,(1+tan^2x)=2tanx\,sec^2x$$

$\therefore$ $y=tanx$ هي حلاً للمعادلة أعلاه $L.H.S=R.H.S$

س 6 : هل $2\,x^2+y^2=1$ حلاً للمعادلة $y^3y''=-2$ ؟

الحل :

$$2\,x^2+y^2=1 \Rightarrow 4x+2y\,y'=0 \Rightarrow 2y\,y'=-4x \overset{\div 2}{\Rightarrow} y\,y'=-2x \Rightarrow y'=\frac{-2x}{y}$$

$$y''=\frac{y(-2)-(-2x)y'}{y^2}=\frac{-2y+2x(\frac{-2x}{y})}{y^2}=\frac{-2y-(\frac{4x^2}{y})}{y^2}=\frac{\frac{-2y^2-4x^2}{y}}{y^2}$$

$$y''=\frac{-2y^2-4x^2}{y^3}=\frac{-2(y^2+2x^2)}{y^3}=\frac{-2(1)}{y^3}=\frac{-2}{y^3}\Rightarrow y''=\frac{-2}{y^3}$$

$$L.H.S=y^3y''=y^3\left(\frac{-2}{y^3}\right)=-2=R.H.S$$

$\therefore$ $2x^2+y^2=1$ هي حلاً للمعادلة أعلاه

س7 : هل $yx=\ sin5x$ حلاً للمعادلة $xy''+2y'+25yx=0$ ؟

الحل :

$$yx\ =\ sin\,5x\ \Rightarrow y\ +\ xy'=5\,cos\,5\,x\ \Rightarrow y'+xy''+y'=-25sin\,5x$$

$$xy''+2y'+25\,sin\,5x=0 \Rightarrow xy''+2y'+25yx=0$$

$\therefore$ $yx=sin\,5x$ هي حلاً للمعادلة أعلاه

س8 : بين أن $y=ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة $y'+y=0$ حيث $a\in R$

الحل : (وزاري ٢٠١٢ / د٣ – ٢٠١٣/د١)

$$y=ae^{-x}\Rightarrow y'=ae^{-x}.(-1)=\ -ae^{-x}$$

$$L.H.S\ =y'+y=-ae^{-x}+\ ae^{-x}=0=R.H.S$$

$\therefore$ $y=ae^{-x}$ هي حلاً للمعادلة أعلاه

س9 : بين ان $c\in R$, $ln|y|=\ x^2+c$ هو حلاً للمعادلة $y''=4x^2y+2y$

الحل : (وزاري ٢٠١٥ /د٢)

$$ln|y|=\ x^2+c \Rightarrow \frac{y'}{y}=2x \Rightarrow\ y'=2xy$$

$$y''=2x(\,y')+2y$$

$$L.H.S=y''=2xy'+2y=2x(2xy)+2y=4x^2y+2y=R.H.S$$

$\therefore$ $lny\ =x^2+c$ هي حلاً للمعادلة أعلاه

المعادلات التفاضلية الاعتيادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى

أولا : المعادلات التي تنفصل متغيراتها

في هذا النوع من المعادلات نستطيع أن نعزل كل الحدود التي تحتوي على (x) مع (dx) في طرف والحدود التي تحتوي على (y) مع (dy) في الطرف الآخر فنحصل على $g(y)dy = f(x)dx$ ثم نكامل الطرفين فنحصل على :

$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$ حيث يمثل (c) ثابت التكامل .

مثال : حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 5 \Rightarrow dy = (2x + 5)dx$$

$$\int dy = \int (2x + 5)dx \Rightarrow y = x^2 + 5x + c$$

مثال : حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y} \Rightarrow y\,dy = (x-1)dx$$

$$\int y\,dy = \int (x-1)dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - x + c \overset{(\times 2)}{\Longrightarrow} y^2 = x^2 - 2x + 2c$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + 2c} \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + c_1} \quad (c_1 = 2c \text{ حيث})$$

مثال : حل المعادلة $dy = \sin x \cos^2 y\, dx$ حيث $(\cos y \neq 0)$, $y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

الحل : نجعل المعادلة $g(y)dy = f(x)dx$

$$dy = \sin x \cos^2 y\, dx \overset{(\div \cos^2 y)}{\Longrightarrow} \frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x\, dx$$

$$\sec^2 y\, dy = \sin x\, dx$$

$$\int \sec^2 y\, dy = \int \sin x\, dx \Rightarrow \tan y = -\cos x + c$$

مثال : حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ عندما $x = 0 , y = 0$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y} \Rightarrow dy = e^{2x}e^{y}\,dx \overset{(\div e^y)}{\Longrightarrow} \frac{dy}{e^y} = e^{2x}\,dx \Rightarrow e^{-y}dy = e^{2x}\,dx$$

$$\int e^{-y}dy = \int e^{2x}\,dx \Rightarrow -\int e^{-y}(-1)\,dy = \frac{1}{2}\int e^{2x}(2)dx$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$ وبالتعويض $x = 0 \;,\; y = 0$

$$-e^0 = \frac{1}{2}e^{2(0)} + c \Rightarrow -1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} \Rightarrow -e^{-y} = \frac{1}{2}(e^{2x} - 3)$$

$$\frac{-1}{e^y} = \frac{e^{2x}-3}{2} \Rightarrow e^y(e^{2x} - 3) = -2 \Rightarrow e^y = \frac{-2}{e^{2x}-3}$$ نأخذ ln للطرفين

$$\ln e^y = \ln\left|\frac{-2}{e^{2x}-3}\right| \Rightarrow y = \ln\left|\frac{-2}{e^{2x}-3}\right|$$

مثال : جد حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \sin^2 x \ \sin^2 y$

الحل :

$$\frac{dy}{\sin^2 y} = \sin^2 x\, dx \Rightarrow \csc^2 y\, dy = \sin^2 x\, dx$$ نأخذ التكامل للطرفين

$$\int \csc^2 y\, dy = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x)\, dx$$ $\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)}$

$$-\cot y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c \overset{\times -1}{\Longrightarrow} \cot y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) - c$$

$$\cot y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c_1$$ (حيث $c_1 = -c$)

مثال : جد حلاً للمعادلة $\frac{dy}{dx} = 5^{2x+y}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 5^{2x}.5^y \Rightarrow \frac{dy}{5^y} = 5^{2x}\, dx \Rightarrow 5^{-y}\, dy = 5^{2x}\, dx$$ نأخذ التكامل للطرفين

$$\int 5^{-y}\, dy = \int 5^{2x}\, dx \Rightarrow -\frac{1}{\ln 5}\int 5^{-y}(-\ln 5)\, dy = \frac{1}{2\ln 5}\int 5^{2x}(2\ln 5)dx$$

$$\left[\frac{-1}{\ln 5}.5^{-y} = \frac{1}{2\ln 5}5^{2x} + c\right] \quad (\ln 5)$$ بالضرب بـ

$$-5^{-y} = \frac{1}{2}5^{2x} + c\ln 5 \overset{\times -1}{\Longrightarrow} 5^{-y} = -\frac{1}{2}5^{2x} - c\ln 5 \Rightarrow 5^{-y} = -\frac{1}{2}5^{2x} + c_1$$ (حيث $c_1 = -c\ln 5$)

مثال : جد حلاً للمعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2$ ، $y = 9$

الحل :

$$y' - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - x\,y^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\,y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dy = x\,(y)^{\frac{1}{2}}dx \overset{(\div y^{\frac{1}{2}})}{\Longrightarrow} \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = x\, dx$$

$$y^{-\frac{1}{2}}\, dy = x\, dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int x\, dx \Rightarrow \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

نعوض $x = 2$ ، $y = 9$ فينتج :

$$2\sqrt{9} = \frac{(2)^2}{2} + c \Rightarrow 6 = 2 + c \Rightarrow c = 4$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + 4 \overset{\div 2}{\Rightarrow} \sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + 2 \xrightarrow{\text{بالتربيع}} y = (\frac{1}{4}x^2 + 2)^2$$

مثال : جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$

الحل :

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow (x+1)dy = 2y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x+1} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x+1} \Rightarrow ln|y| = 2ln|x+1| + c \Rightarrow ln|y| = ln(x+1)^2 + c$$

$$ln|y| - ln(x+1)^2 = c \Rightarrow ln\frac{|y|}{(x+1)^2} = c \xrightarrow{\text{نأخذ } e \text{ للطرفين}} \frac{|y|}{(x+1)^2} = e^c$$

$$|y| = e^c(x+1)^2 \Rightarrow y = \pm c_1(x+1)^2 \qquad (c_1 = e^c \text{ حيث})$$

حل تمارين (2 – 5)

س1 : حل المعادلات التفاضلية الاتية بطريقة فصل المتغيرات :

(a) $y' \cos^3 x = sinx$

$$\frac{dy}{dx}.\cos^3 x = \sin x \Rightarrow (\cos^3 x)dy = (\sin x)dx \Rightarrow dy = \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$$

$$dy = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos^2 x}dx \Rightarrow dy = tanx\, sec^2 x\, dx \Rightarrow \int dy = \int tan\,x\; sec^2 x\, dx$$

$$y = \frac{(tan\,x)^2}{2} + c$$

(b) $\frac{dy}{dx} + xy = 3x \qquad x = 1 \quad , \quad y = 2$

$$\frac{dy}{dx} = 3x - xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\,(3 - y\,) \Rightarrow \frac{dy}{3-y} = x\,dx$$

$$-1\int \frac{(-1)dy}{3-y} = \int xdx \Rightarrow -ln|3-y| = \frac{x^2}{2} + c \qquad x = 1 \qquad y = 2$$

$$-ln\,|3-2| = \frac{1}{2} + c \Rightarrow -ln\,1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$-ln\,|3-y| = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \overset{\times -1}{\Longrightarrow} ln\,|3-y| = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \Rightarrow 3 - y = e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = 3 - e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$$

(c) $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

$$\frac{dy}{(y-1)} = (x+1)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{(y-1)} = \int (x+1)dx \Rightarrow ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + x + c$$

$$(y-1) = e^{\frac{x^2}{2}+x+c} \Rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2}+x+c} + 1$$

(d) $(y^2 + 4y - 1)y' = x^2 - 2x + 3$

$$(y^2 + 4y - 1)\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow \int (y^2 + 4y - 1)dy = \int (x^2 - 2x + 3)\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} + 2y^2 - y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + c$$

(e) $yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

$$y\frac{dy}{dx} = 4(1+y^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{y\,dy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\,dx \Rightarrow \int \frac{y\,dy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\int dx$$

$$\int y(1+y^2)^{\frac{-3}{2}}(dy) = \int 4dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int (1+y^2)^{\frac{-3}{2}}\,2y\,dy = \int 4\,dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{(1+y^2)^{\frac{-1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right) = 4x + c \Rightarrow -(1+y^2)^{\frac{-1}{2}} = 4x + c \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x + c$$

(f) $e^x.dx - y^3dy = 0$ $\Rightarrow e^x.dx = y^3dy \Rightarrow \int e^xdx = \int y^3dy \Rightarrow e^x = \frac{y^4}{4} + c$

$$\frac{y^4}{4} = e^x - c \Rightarrow y^4 = 4e^x - 4c \Rightarrow y = \pm\sqrt{4e^x - 4c} \Rightarrow y = \pm\sqrt{4e^x + c_1} \quad (c_1 = -4c)$$

(g) $y' = 2e^xy^3$ $\qquad x = 0 \;,\; y = \frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2e^xy^3 \Rightarrow dy = 2e^xy^3dx \overset{\div y^3}{\Longrightarrow} \frac{dy}{y^3} = 2e^xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y3} = \int 2e^x\,dx$$

$$\int y^{-3}dy = 2\int e^x\,dx \Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = 2e^x + c \Rightarrow \frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c \overset{\times(-1)}{\Longrightarrow} \frac{1}{y^2} = -4e^x - 2c$$

$$\frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = -4e^0 - 2c \Rightarrow 4 = -4 - 2c \Rightarrow -2\,c = 8 \Rightarrow c = -4$$

$$\frac{1}{y^2} = -4e^x + 8 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{-4e^x+8} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{-4e^x+8}}$$

س2 : جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

(a) $xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 - y^2 \Rightarrow xy\frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2 \Rightarrow xy\,dy = (1 - 2y^2)dx$$

$$\frac{y\,dy}{(1-2y^2)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{y\,dy}{(1-2y^2)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{4}\int \frac{(-4y)}{(1-2y^2)}\,dy = \int \frac{dx}{x}$$

$-\frac{1}{4}\ln|1-2y^2| = \ln|x| + \ln|c| \Rightarrow \ln(1-2y^2)^{-\frac{1}{4}} = \ln|cx|$ بأخذ e للطرفين

$(1-2y^2)^{-\frac{1}{4}} = cx \Rightarrow \frac{1}{(1-2y^2)^{\frac{1}{4}}} = cx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{1-2y^2}} = cx \Rightarrow \sqrt[4]{1-2y^2} = \frac{1}{cx}$

$1-2y^2 = \frac{1}{(cx)^4} \Rightarrow 2y^2 = 1 - \frac{1}{(cx)^4} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^4c^4} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{c_1x^4}}$ $(2c^4 = c_1)$

(b) $\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$

$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} = -\cos x \sin y \Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y}\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = -\frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$\int \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = \int -\frac{\cos x}{\sin x}\,dx \Rightarrow \ln|\sin y| = -\ln|\sin x| + c$

$\ln|\sin y| = \ln|(\sin x)^{-1}| + \ln c_1 \Rightarrow \ln|\sin y| = \ln|c_1(\sin x)^{-1}|$

$\ln \sin y = \ln\left|\frac{c_1}{\sin x}\right| \Rightarrow \sin y = \pm\frac{c_1}{\sin x}$

(c) $x\cos^2 y\,dx + \tan y\,dy = 0$

$\tan y\,dy = -x\cos^2 y\,dx \xRightarrow{\div \cos^2 y} \frac{\tan y}{\cos^2 y}\,dy = -x\,dx \Rightarrow \int \frac{\tan y}{\cos^2 y}\,dy = -\int x\,dx$

$\int \tan y.\sec^2 y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow \frac{(\tan y)^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \xRightarrow{\times 2} \frac{1}{2}(\tan y)^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$

(d) $\tan^2 y\,dy = \sin^3 x\,dx \Rightarrow \int(\sec^2 y - 1)dy = \int \sin^2 x \sin x\,dx$

$\int(\sec^2 y - 1)dy = \int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$\int(\sec^2 y - 1)dy = \int[\sin x - (\cos x)^2 \sin x]\,dx$

$\int(\sec^2 y)dy - \int dy = \int \sin x\,dx + \int(\cos x)^2(-\sin x)\,dx$

$\tan y - y = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$

(e) $\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 y \Rightarrow \frac{dy}{\cos^2 y} = \cos^2 x\,dx \Rightarrow \int\frac{dy}{\cos^2 y} = \int \cos^2 x\,dx$

$\int \sec^2 y\,dy = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx \Rightarrow \tan y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c$

(f) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2+e^y} \Rightarrow 3y^2 + e^y\,dy = \cos x\,dx \Rightarrow \int(3y^2+e^y)dy = \int \cos x\,dx$

$\frac{3y^3}{3} + e^y = \sin x + c \Rightarrow y^3 + e^y = \sin x + c$

(g) $e^{x+2y} + y' = 0 \Rightarrow e^x.e^{2y} + \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -e^x.e^{2y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{2y}} = -e^x\,dx$

$\int\frac{dy}{e^{2y}} = -\int e^x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2}\int e^{-2y}(-2)dy = -\int e^x dx$

$-\frac{1}{2}e^{-2y} = -e^x + c \Rightarrow \frac{-1}{2e^{2y}} = -e^x + c$

حل المعادلات التفاضلية المتجانسة

ثانيا : المعادلة التفاضلية المتجانسة

هي المعادلة التي نستطيع كتابتها بالشكل $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ فمثلا المعادلة $(x^4 - y^4)\frac{dy}{dx} = x^3 y$ يمكن كتابتها بالصورة

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^4}$ (بقسمة طرفي المعادلة على x^4)

ملاحظة : لمعرفة المعادلة متجانسة نقوم بوضع x عن كل y في المعادلة فاذا كانت الاسس متساوية فإن المعادلة متجانسة.

مثال : بين اي المعادلات التالية متجانسة :

$(1)\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^3+y^3}{3x^2y}$ بقسمة البسط والمقام على $x^3 \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{y^3}{x^3}}{\frac{3x^2y}{x^3}} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+(\frac{y}{x})^3}{3(\frac{y}{x})}$$ المعادلة متجانسة

$(2)\ 2\,x\,y\,y' - y^2 + 2x^2 = 0$ بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$

$$2\,\frac{xy}{x^2}\,y' - \frac{y^2}{x^2} + 2\,\frac{x^2}{x^2} = 0 \Longrightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2 = 0$$

$$2\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2-2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$ المعادلة متجانسة

$(3)\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y}{x^3}$ غير متجانسة لأنه لا يمكن كتابتها بالشكل $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$

طريقة حل المعادلة التفاضلية المتجانسة : اذا كانت المعادلة التفاضلية متجانسة فإننا نتبع ما يأتي :

١) نكتب المعادلة بالصورة $[\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)]$ ثم نعوض عن كل $[v = \frac{y}{x}]$ أو $[y = v\,x]$ حيث v دالة الى x .

٢) نشتق $y = v\,x$ بالنسبة الى x فنحصل على $[\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}]$

٣) نربط بين الخطوتين (1)و(2) فنحصل على $v + x\frac{dv}{dx} = f(v) \Longrightarrow x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$

٤) بعد فصل المتغيرات نحصل $\frac{dv}{f(v)-v} = \frac{dx}{x}$

٥) ناخذ التكامل للطرفين لينتج $\int \frac{dv}{f(v)-v} = \int \frac{dx}{x}$

٦) نعوض بعد ذلك عن $[\frac{y}{x} = v]$ فنحصل على الحل العام بدلالة المتغيرين x , y .

مثال : حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$

الحل :

$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2-x^2}{2xy}$ بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{3y^2}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3(\frac{y}{x})^2-1}{2(\frac{y}{x})} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v} \dots\dots\dots (2) \qquad [v=\frac{y}{x} \text{ وضعنا}]$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$\because y = v\,x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\,\frac{dv}{dx} \dots\dots\dots (3)$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v} \Rightarrow x\,\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v}-v \Rightarrow x\,\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v} \Rightarrow x\,dv=\frac{v^2-1}{2v}\,dx \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{2v}{v^2-1}\,dv$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{2v}{v^2-1}dv \Rightarrow ln\,|x|=ln\,|v^2-1|+ln\,|c|$$

$$ln\,|x|=ln\,|c(\,v^2-1)| \Rightarrow x=\pm\,c(v^2-1)$$

$$v=\frac{y}{x} \Rightarrow x=\pm c\left[\frac{y^2}{x^2}-1\right] \Rightarrow x=\pm c\left(\frac{y^2-x^2}{x^2}\right) \Rightarrow c=\pm\frac{x}{\left(\frac{y^2-x^2}{x^2}\right)} \Rightarrow c=\pm\left(\frac{x^3}{y^2-x^2}\right)$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{y-x}$$ بقسمة البسط والمقام على $x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v+1}{v-1} \dots\dots\dots (2) \qquad [v=\frac{y}{x} \text{ وضعنا}]$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$\because\ y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\,\frac{dv}{dx} \dots\dots\dots (3)$$

$$v+\ x\,\frac{dv}{dx}=\frac{v+1}{v-1} \Rightarrow x\,\frac{dv}{dx}=\frac{v+1}{v-1}-v \Rightarrow x\,\frac{dv}{dx}=\frac{v+1-v(v-1)}{v-1}$$

$$x\,\frac{dv}{dx}=\frac{v+1-v^2+v}{v-1} \Rightarrow x\,\frac{dv}{dx}=\frac{2v-v^2+1}{v-1}$$

$$\therefore \frac{v-1}{2v-v^2+1}dv=\frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \int\frac{1}{x}\,dx=\int\frac{v-1}{2v-v^2+1}dv$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \frac{-1}{2}\int \frac{-2v+2}{2v-v^2+1}dv \Rightarrow \frac{-1}{2}ln|2v-v^2+1| + ln|c| = ln|x|$$

$$ln\,|c[2v-v^2+1]^{\frac{-1}{2}}| = ln|x| \Rightarrow ln\left|\frac{c}{\sqrt{2v-v^2+1}}\right| = ln\,|x|$$

$$\frac{c}{\sqrt{2v-v^2+1}} = |x| \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{2\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}} = |x|$$

$$|x| = \frac{c}{\sqrt{2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}+1}} \Rightarrow x^2 = \frac{c^2}{2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}+1} \Rightarrow c^2 = x^2+2yx-y^2$$

مثال : حل المعادلة $(3x-y)y' = x+y$

الحل :

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3x-y}$ (نقسم البسط والمقام على $x \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{y}{x}}{3\frac{x}{x}-\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}} \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \ldots\ldots\ldots(2) \qquad [\text{وضعنا } v=\frac{y}{x}]$$

$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots\ldots\ldots(3)$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v + x\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - v \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v}$$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{v^2-2v+1}{3-v} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{(v-1)^2}{3-v}$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{3-v}{(v-1)^2}dv \Rightarrow \int \frac{-(v-3)}{(v-1)^2}dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{-[(v-1)-2]}{(v-1)^2}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{-(v-1)}{(v-1)^2}\,dv + \int \frac{2}{(v-1)^2}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dv}{v-1} + (2)\int (v-1)^{-2}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-ln|v-1|+\frac{2\,(v-1)^{-1}}{-1}+c=ln\,|x| \Rightarrow -ln|v-1|+\frac{-2}{(v-1)}+c=ln\,|x|$$

$$\because v=\frac{y}{x} \Rightarrow ln\,|x|-ln\,\left|\frac{y}{x}-1\right|-\frac{2}{\frac{y}{x}-1}+c$$

$$ln|x|+ln\,\left|\frac{y}{x}-1\right|=\frac{-2}{\frac{y-x}{x}}+c \Rightarrow ln\left|x\left(\frac{y}{x}-1\right)\right|=\frac{-2x}{y-x}+c$$

$$ln|y-x|=\frac{-2x}{y-x}+c$$

مثال : حل المعادلة التفاضلية $2xyy'-y^2+x^2=0$

الحل :

$$2xyy'=y^2-x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{2xy} \qquad (x^2 \neq 0 \text{ نقسم البسط والمقام على})$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y^2}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{(\frac{y}{x})^2-1}{2(\frac{y}{x})}\ \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}\ \dots\dots\dots(2) \qquad [v=\frac{y}{x}\ \text{وضعنا}]$$

$$y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dy}{dx}\ \dots\dots..(2)$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}\ \dots\dots\dots(3)$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1-2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{-v^2-1}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{-(v^2+1)}{2v}$$

$$\frac{2v}{(v^2+1)}dv=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{2v}{v^2+1}\,dv=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow ln\,|v^2+1|+ln\,|c|=-ln\,|x|$$

$$ln\,|v^2+1|+ln\,|x|=-ln\,|c| \Rightarrow ln\,|x(v^2+1)|=ln\,|c^{-1}|$$

$$ln\,|x(v^2+1)|=ln\,\left|\frac{1}{c}\right| \Rightarrow \pm x(v^2+1)=\frac{1}{c} \Rightarrow c=\pm\frac{1}{x(v^2+1)}$$

$$\because v=\frac{y}{x} \Rightarrow c=\pm\frac{1}{x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)} \Rightarrow c=\pm\frac{1}{x\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)} \Rightarrow c=\pm\frac{1}{\left(\frac{y^2+x^2}{x}\right)}$$

$$c=\pm\frac{x}{y^2+x^2}$$

مثال : جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $2\,x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$

الحل :

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$ (نقسم البسط والمقام على $x^2\neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+v^2}{2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\qquad[v=\frac{y}{x}\ \text{وضعنا}]$$

$$\because y=vx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{x}\;\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}-v\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2-2v}{2}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-2v+1}{2}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{(v-1)^2}{2}\Rightarrow\int\frac{2\,dv}{(v-1)^2}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\int 2\,(v-1)^{-2}dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{2(v-1)^{-1}}{-1}=ln|x|+c\Rightarrow\frac{-2}{v-1}=ln|x|+c\qquad(v=\frac{y}{x}\ \text{نضع})$$

$$\frac{-2}{\frac{y}{x}-1}=ln|x|+c\Rightarrow\frac{-2}{\frac{y-x}{x}}=ln|x|+c\Rightarrow\frac{-2x}{y-x}=ln|x|+c$$

$$y-x=\frac{-2x}{ln|x|+c}\Rightarrow y=x-\frac{2x}{ln|x|+c}$$

حل تمارين (3 – 5)

حل كلاً من المعادلات التفاضلية الاتية :

$(1)\ y'=\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}\qquad[v=\frac{y}{x}\ \text{وضعنا}]$$

$$\frac{dy}{dx}=v+e^v\;\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y=vx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\;\ldots\ldots\ldots(2)$$ نعوض المعادلة (2) في المعادلة (1) فينتج :

$$v+x\frac{dv}{dx}=v+e^v\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=e^v\Rightarrow xdv=e^vdx\Rightarrow\frac{dv}{e^v}=\frac{dx}{x}$$

$\int e^{-v}dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -e^{-v} + c = \ ln|x| \Rightarrow ln|x| = -e^{-\frac{y}{x}} + c$

(2) $(y^2 - xy)dx \ + \ x^2dy = 0$

$x^2dy \ = \ -(\ y^2 - \ xy\ )\ dx \ \Rightarrow x^2dy \ = \ (\ xy - y^2)\ dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$ (بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$)

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \ \dots\dots\dots (1)$

$\frac{dy}{dx} = v - (v)^2 \ \dots\dots\dots (2)$ (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

$\because y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \dots\dots\dots (3)$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$\therefore v + x\frac{dv}{dx} = v - \ v^2 \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \ -v^2 \Rightarrow x\ dv = -v^2dx \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -\frac{dx}{x}$

$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int v^{-2}\ dv = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{v^{-1}}{-1} + c = -ln|x|$

$-ln|x| = \frac{-1}{v} + c \xRightarrow{(\times -1)} ln|x| = \frac{1}{\frac{y}{x}} - c \ \Rightarrow ln|x| = \frac{x}{y} - c \Rightarrow ln|x| = \frac{x}{y} + c_1 \quad (-c = c_1)$

(3) $(x + 2y)\ dx \ + (2x + 3y)\ dy = 0$

$(2x + 3y)dy = -(\ x + 2y)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x-2y}{2x+3y}$ (نقسم البسط والمقام على $x \neq 0$)

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-x}{x} - \frac{2y}{x}}{\frac{2x}{x} + 3\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1-2\frac{y}{x}}{2+3\frac{y}{x}} \dots\dots\dots (1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v} \dots\dots\dots (2)$ (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

$\because y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \dots\dots\dots (3)$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v} - \ v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} \ = \frac{-1-2v-v(2+3v)}{2+3v}$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v-2v-3v^2}{2+3v}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{-(3v^2+4v+1)}{2+3v}$$

$$-x\,dv=\frac{3v^2+4v+1}{2+3v}\,dx\;\Rightarrow\int\frac{(2+3v)dv}{3v^2+4v+1}=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{1}{2}\int\frac{2(2+3v)dv}{3v^2+4v+1}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}ln|3v^2+4v+1|=-ln|x|+c\;\Rightarrow -c=ln\left|(3v^2+4v+1)^{\frac{1}{2}}\right|+ln|x|$$

$$ln_{c_1}=ln\left|x\sqrt{3v^2+4v+1}\right|\Rightarrow c_1=\left|x\sqrt{3v^2+4v+1}\right|$$

$$c_1=\left|x\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+1}\right|\Rightarrow c_1=\left|x\sqrt{\frac{y^2+4xy+3y^2}{x^2}}\right|$$

$$c_1=\left|x\frac{\sqrt{y^2+4xy+3y^2}}{\sqrt{x^2}}\right|\Rightarrow c_1=|x|\left|\frac{\sqrt{y^2+4xy+3y^2}}{|x|}\right|$$

$$c_1=\left|\sqrt{y^2+4xy+3y^2}\right|$$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$ (نقسم البسط والمقام على $x^2\neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2\frac{y}{x}}\;\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}\;\ldots\ldots\ldots(2)\qquad (v=\frac{y}{x}\text{ وضعنا})$$

$$\because y=vx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\;\ldots\ldots\ldots(3)$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}-v\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{2v}\Rightarrow x\,dv=\frac{1-v^2}{2v}\,dx\Rightarrow\frac{2v\,dv}{1-v^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow-\int\frac{-2v\,dv}{(1-v^2)}=\int\frac{dx}{x}$$

$$-ln\left|(1-v^2)\right|+ln|c|=ln\,|x|\Rightarrow\;ln\left|(1-v^2)\right|+ln\,|x|=ln|c|$$

$$ln\left|x(1-v^2)\right|=ln|c|\Rightarrow|c|=\left|x(1-v^2)\right|$$

$$c = \pm x(1-v^2) \Rightarrow c = \pm x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) \Rightarrow c = \pm x\frac{x^2-y^2}{x^2} \Rightarrow c = \pm\left(\frac{x^2-y^2}{x}\right)$$

(5) $(y^2-x^2)dx + xy\,dy = 0 \Rightarrow xy\,dy = -(y^2-x^2)dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y^2}{xy}$ (نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}} \dots\dots\dots(1)$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1-v^2}{v} \dots\dots\dots(2)$ (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

$\because y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \dots\dots\dots(3)$ نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2-v^2}{v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v^2}{v}$$

$$\frac{v\,dv}{1-2v^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{-1}{4}\int\frac{(-4)\,v\,dv}{1-2v^2} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{-1}{4}ln|1-2v^2| + ln|c| = ln|x|$$

$$-ln|1-2v^2|^{\frac{1}{4}} + ln|c| = ln|x| \Rightarrow ln\left|(1-2v^2)^{\frac{1}{4}}\right| + ln|x| = ln|c|$$

$$ln\left|x(1-2v^2)^{\frac{1}{4}}\right| = ln|c| \Rightarrow ln|c| = \left|x\sqrt[4]{1-2v^2}\right| \Rightarrow c = \pm x\sqrt[4]{1-2v^2}$$

$$\therefore c = \pm x\sqrt[4]{1-2\left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow c = \pm x\sqrt[4]{1-\frac{2y^2}{x^2}} \Rightarrow c = \pm x\sqrt[4]{\frac{x^2-2y^2}{x^2}}$$

(6) $x^2y\,dx = (x^3+y^3)dy$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3+y^3}$ (نقسم البسط والمقام على $x^3 \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3+y^3}{x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{y^3}{x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3} \dots\dots\dots(1)$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{1+v^3} \dots\dots\dots(2)$ (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج : $\because y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots\ldots\ldots(3)$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v(1+v^3)}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v - v^4}{1+v^3} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1+v^3} \Rightarrow \frac{1+v^3}{v^4}dv = \frac{-dx}{x}$$

$$\int\frac{1+v^3}{v^4}dv = -\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{1}{v^4}dv + \int\frac{v^3}{v^4}dv = -\int\frac{dx}{x}$$

$$-\int\frac{dx}{x} = \int v^{-4}dv + \int\frac{1}{v}dv \Rightarrow -ln|x| = \frac{1}{-3}v^{-3} + ln|v| + ln|c|$$

$$-ln|x| = \frac{-1}{3v^3} + ln|v| + ln|c| \Rightarrow \frac{1}{3v^3} = ln|x| + ln|v| + ln|c|$$

$$\frac{1}{3v^3} = ln|xvc| + c \Rightarrow \frac{1}{3\left(\frac{y}{x}\right)^3} = ln\left|x\frac{y}{x}c\right| \Rightarrow \frac{1}{3\frac{y^3}{x^3}} = ln|yc|$$

$$\frac{x^3}{3y^3} = ln|yc| \Rightarrow y^3 = \frac{x^3}{3ln|cy|} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt[3]{3ln|cy|}}$$

7) $x\left(\frac{dy}{dx} - tan\frac{y}{x}\right) = y$

$$\left(\frac{dy}{dx} - tan\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tan\frac{y}{x}\ldots\ldots\ldots(1)$$

$\frac{dy}{dx} = v + tan\,v\ldots\ldots\ldots(2)$ (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج : $\because y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots\ldots\ldots(3)$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + tan\,v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = tan\,v \Rightarrow \frac{dv}{tan\,v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{1}{\frac{sin\,v}{cos\,v}}dv \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{cos\,v}{sin\,v}dv \Rightarrow ln|x| = ln|sin\,v| + ln|c|$$

$$ln|x| = ln|c(sin\,v)| \Rightarrow |x| = |c(sinv)| \Rightarrow x = \pm c(sin\,v) \Rightarrow x = \pm c\left(sin\frac{y}{x}\right)$$

حل التمارين العامة الخاصة بالفصل الخامس

س13 : حل المعادلة التفاضلية الاتية : $y' = \frac{cos^2 y}{x}$, $y = \frac{\pi}{4}$, $x = 1$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos^2 y}{x} \Rightarrow x dy = cos^2 y\, dx \xrightarrow{(\div x\, cos^2 y)} \frac{dy}{cos^2 y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{cos^2 y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int sec^2 y\, dy = \int \frac{dx}{x}$$ $\boxed{\frac{1}{cos^2 y} = sec^2 y}$

$$tan\, y = ln\,|x| + c$$ $\boxed{tan\,\frac{\pi}{4} = 1\ ,\ ln\,1 = 0}$

$$tan\,\frac{\pi}{4} = ln\,|1| + c \Rightarrow 1 = 0 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\therefore tan\, y = ln\,|x| + 1$$

س14 : حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = -2x\, tan\, y$ حيث ان $x = 0$ عندما $y = \frac{\pi}{2}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = -2x\, tan\, y \Rightarrow [dy = -2x\, tan\, y\, dx] \div tan\, y$$

$$\frac{dy}{tan\, y} = -2x\, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\frac{sin\, y}{cos\, y}} = \int -2x\, dx \Rightarrow \int \frac{cos\, y}{sin\, y} dy = \int -2x\, dx$$

$$ln\,|sin\, y| = -2\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow ln\,|sin\, y| = -x^2 + c$$ $\boxed{y = \frac{\pi}{2}\ ,\ x = 0}$

$$ln\left|sin\,\frac{\pi}{2}\right| = 0 + c \Rightarrow ln\,(1) = c \Rightarrow c = 0$$ $\boxed{sin\,\frac{\pi}{2} = 1}$

$$\therefore ln\,|sin\, y| = -x^2 \xrightarrow{\text{بأخذ } e \text{ للطرفين}} sin y = e^{-x^2}$$

س15 : حل المعادلة التفاضلية $\acute{y} = 2e^x y^3$ حيث ان $x = 0$ عندما $y = \frac{1}{2}$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \Rightarrow \frac{dy}{y^3} = 2e^x\, dx \Rightarrow \int y^{-3} dy = 2\int e^x\, dx \Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = 2\, e^x + c$$

$$\frac{1}{-2y^2} = 2\, e^x + c \Rightarrow \frac{1}{-2\frac{1}{4}} = 2\, e^0 + c$$ $\boxed{x = 0\ ,\ y = \frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{\frac{-1}{2}} = 2\,(1) + c \Rightarrow -2 = 2 + c \Rightarrow c = -4$$ $\boxed{e^0 = 1}$

$$\frac{1}{-2y^2} = 2\, e^x - 4$$

س15 : (حسب المنهج الجديد) حل المعادلة التفاضلية $x\acute{y} = y - x$ حيث ان $x = 1 , y = 1$

الحل :

$$x\frac{dy}{dx} = y - x \overset{(\div x)}{\Longrightarrow} \frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = v - 1 \dots\dots\dots(2) \qquad (v = \frac{y}{x} \text{ وضعنا})$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$\because y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \dots\dots\dots(3)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - 1 \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -1 \Rightarrow x\,dv = -dx \overset{(\div x)}{\Longrightarrow} dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\int dv = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow v = -ln\,|x| + c \Rightarrow \frac{y}{x} = -ln|x| + c$$

نعوض $x = 1$, $y = 1$ لإيجاد قيمة الثابت c

$$\frac{y}{x} = -ln|x| + c \Rightarrow \frac{1}{1} = -ln|1| + c \Rightarrow 1 = 0 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\therefore \frac{y}{x} = -ln|x| + 1$$

س16 : حل المعادلة التفاضلية الاتية : $(x^2 + 3y^2)dx - 2xy\,dy = 0$

الحل :

$$(x^2 + 3y^2)dx = 2xy\,dy \Rightarrow 2xy\frac{dy}{dx} = (x^2 + 3y^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy} \qquad (\text{نقسم البسط والمقام على } x^2 \neq 0)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} = \frac{1 + 3(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})} \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v} \dots\dots\dots(2) \qquad (v = \frac{y}{x} \text{ وضعنا})$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$\because y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \dots\dots\dots(3)$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + 3v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + 3v^2}{2v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + 3v^2 - 2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 + 1}{2v} \Rightarrow x\,dv = \frac{v^2 + 1}{2v}dx \Rightarrow \frac{dv}{\frac{v^2 + 1}{2v}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{2vdv}{v^2 + 1} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2vdv}{v^2 + 1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow ln\,|v^2 + 1| + ln|c| = ln|x| \Rightarrow ln|x| = ln\,|c(v^2 + 1)|$$

$$x = c\,.(v^2 + 1) \Rightarrow x = c\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) \Rightarrow x = c\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right)$$

الفصل السادس

الهندسة الفضائية



الهندسة الفضائية

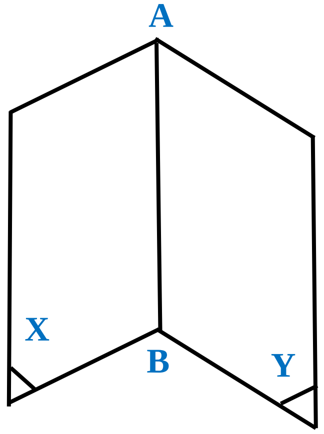
مراجعة :

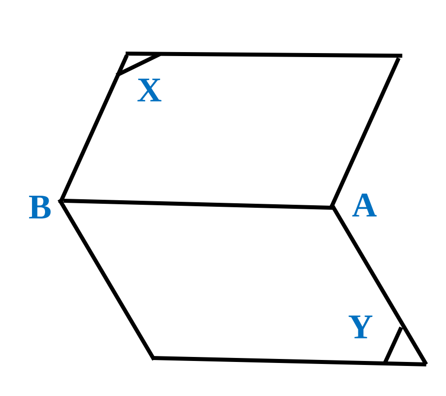
١. لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما .
٢. لكل مستقيمن متوازيان يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما .
٣. عبارة التوازي (اذا علم مستقم ونقطة لا تنتمي اليه فيوجد مستقيم وحيد يمر من تلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم) .
٤. في المستوي الواحد المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر .
٥. المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر .
٦. في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم واحد فقط عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة (تنتمي للمستقيم أو لا ينتمي اليه) .
٧. اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما ونقطة من الاخر فإنه يحتويهما .
٨. المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر .
٩. في المستوي الواحد المستقيمان العموديان على مستقيم واحد متوازيان .
١٠. اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما يوازي الاخر .
١١. المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما .
١٢. المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن المستوي .
١٣. اذا كان كل من مستقيمين متقاطعين يوازيان مستوي معلوم فان مستويهما يوازي المستوي المعلوم .
١٤. اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوت الزاويتان وتوازى مستويهما .
١٥. قطعة المستقيم الواصلة بين منتصفي ضلعي مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه بالقياس .
١٦. العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصفها .
١٧. اذا وازى مستقيم مستوي فالمستقيم المرسوم من أية نقطة من نقاط المستوي موازيا للمستقيم المعلوم يكون محتوى في ذلك المستوي .
١٨. المستقيمان العموديان على مستو واحد متوازيان .
١٩. المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفراغ متوازيان .
٢٠. يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا توازى كل ضلعين متقابلين فيه .
٢١. يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا توازى وتساوى ضلعين متقابلين فيه .
٢٢. المستطيل هو متوازي اضلاع احدى زواياه قائمة .
٢٣. يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو معلوم من نقطة معلومة .
٢٤. يتطابق المثلثان بضلعين وزاوية محددة بهما .
٢٥. العمود النازل من نقطة معلومة على مستوٍ هو أقصر مسافة بين النقطة المعلومة والمستوي .
٢٦. مبرهنة الاعمدة الثلاثة ونتيجتها .

الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة

الزاوية الزوجية : إتحاد نصفي مستويين لهما حافة (Edge) مشتركة .

وتسمى الحافة المشتركة بـ (حرف الزاوية الزوجية) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ (وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل :

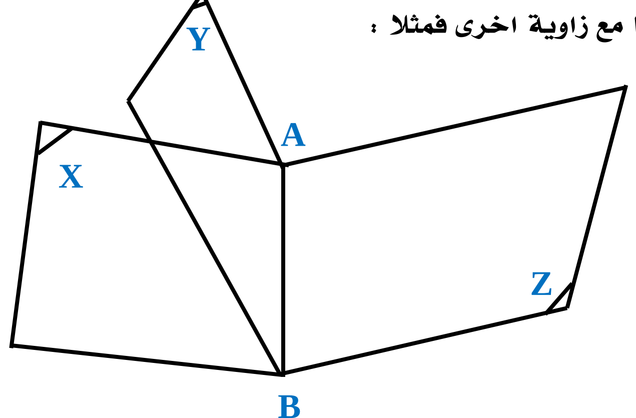




حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية

(X) و (Y) هما وجهاها ، ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير : $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية ان لم يكن مشتركا مع زاوية اخرى فمثلا :



الزاوية الزوجية :

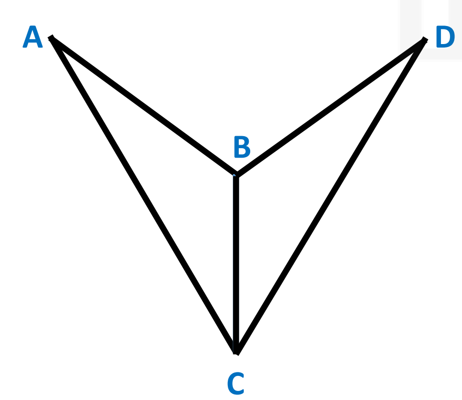
$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Z)$

$(Z) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

ولا يمكن أن تكتب الزاوية الزوجية بشكل $\overleftrightarrow{AB}$ في هذا المثال لأن الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ مشترك في أكثر من زاوية زوجية .

ملاحظة : عندما تكون اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد ، تكتب الزاوية الزوجية $A - \overleftrightarrow{BC} - D$ أو الزاوية الزوجية بين المستويين (ABC) أو (DBC) كما في الشكل .

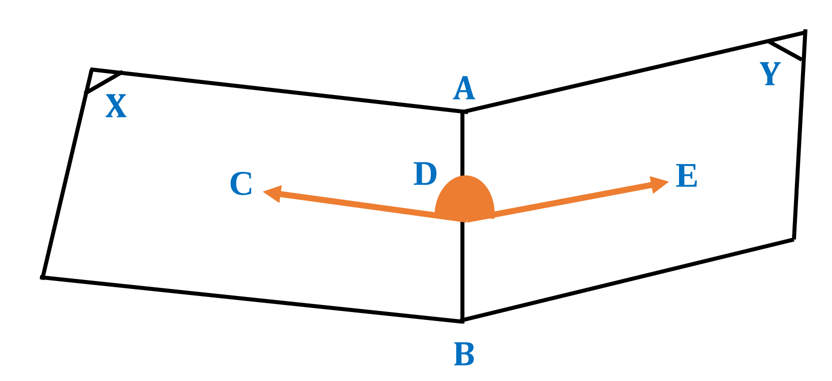


وتقاس الزاوية الزوجية كالاتي : نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة $\overleftrightarrow{AB}$ ونرسم من D العمود $\overrightarrow{DC}$ في (X) والعمود $\overrightarrow{DE}$ في (Y) على الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ فيكون قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية CDE الزاوية العائدة للزاوية الزوجية ، كما في الشكل :

بعبارة اخرى لدينا الزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

ولدينا $\overrightarrow{DC} \subset (X)\,,\ \overrightarrow{DE} \subset (Y)$

$\overrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$



$\therefore \measuredangle CDE$ هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$ أو $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية : هي الزاوية التي ضلعاها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية .

أو هي اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية .

ومن تعريف الزاويتين العائدة والزوجية يمكن استنتاج الاتي :

1) قياس زاوية عائدة لزاوية زوجي ثابت .

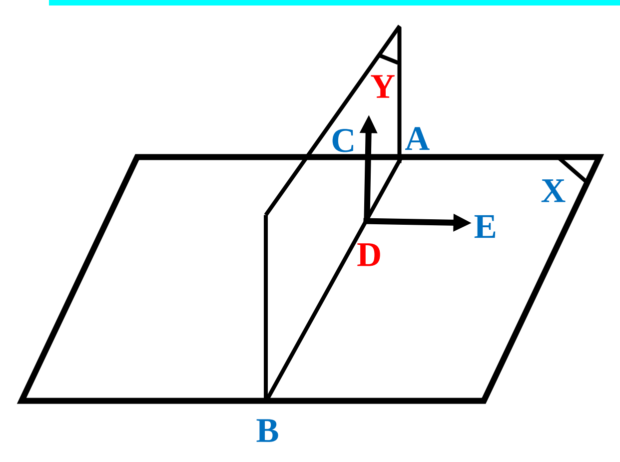
2) قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس .

ملاحظة : ١) اذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فإن المستويين متعامدان وبالعكس . (نستفاد منها في اثبات مبرهنة 7)

قياس $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y) = 90^\circ \Leftrightarrow (X) \perp (Y)$ وكذلك قياس الزاوية العائدة 90°

٢) كل مستويان متعامدان يجب ان يكونا متقاطعان لكل العكس ليس بالضرورة .

مبرهنة (7) : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على المستوى الاخر . وزاري (٢٠١١/د١ – ٢٠١٣/د٢ – ٢٠١٥/د٣)



__المعطيات :__

$(X) \perp (Y)$ ، $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في نقطة D

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$ ، $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

__المطلوب اثباته :__ $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان :

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$ (معطى)

$\therefore$ $\measuredangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$ (تعريف الزاوية العائدة)

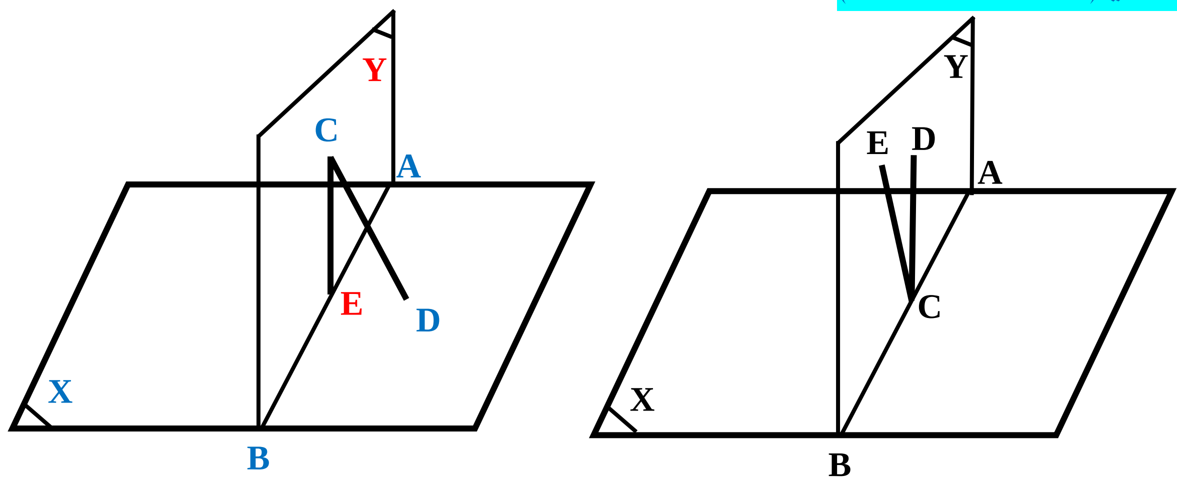
$\therefore$ $m\measuredangle CDE = 90°$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين $90°$ فإن المستقيمين متعامدان وبالعكس)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما)

(و . هـ . م)

نتيجة مبرهنة 7 : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في أحدهما عموديا على المستوي الاخر يكون محتوى فيه . وزاري (٢٠١٣/د٣ – ٢٠١٥/د٢)



المعطيات : $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ ، $C \subset (Y)$ ، $(X) \perp (Y)$

المطلوب اثباته : $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$

البرهان : اذا لم يكن $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$ نرسم $\overleftrightarrow{CE} \subset (Y)$ وعمودي على $\overleftrightarrow{AB}$

(في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because$ $(X) \perp (Y)$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CE} \perp (X)$ (مبرهنة 7) (اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على المستوى الاخر)

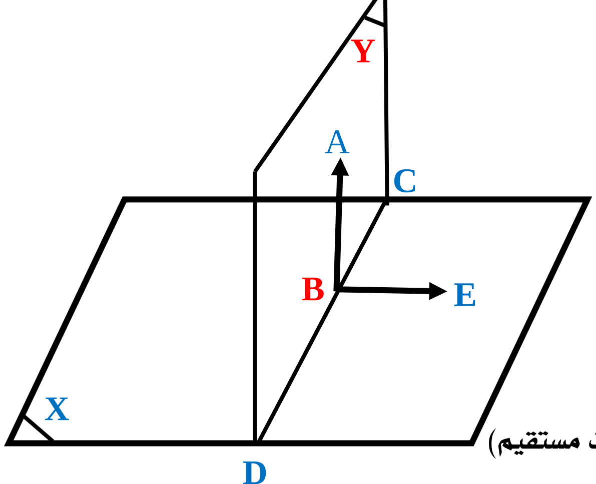
$\because$ $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{CE}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$ (و . هـ . م)

مبرهنة (8) : كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عموديا على ذلك المستوي .

أو (يتعامد المستويان اذا أحتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الاخر) . وزاري (٢٠١١ /د١– ٢٠١٦/د١ – ٢٠١٨)



المعطيات : $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

المطلوب اثباته : $(Y) \perp (X)$

البرهان : ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي على النقاط المشتركة)

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ (معطى)

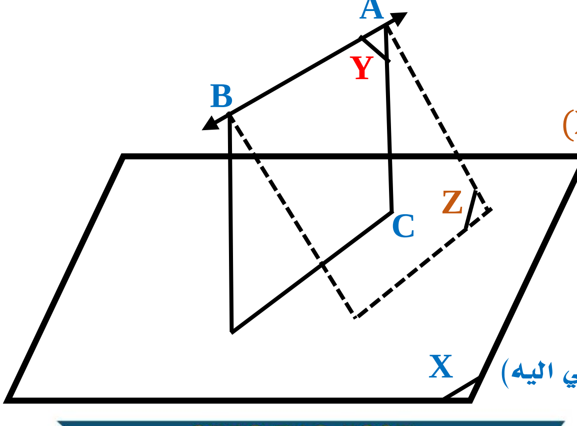
$\therefore \measuredangle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore m\measuredangle ABE = 90^\circ$ (لأن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{CD} - (X) = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore (Y) \perp (X)$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية 90° فإن المستويين متعامدان وبالعكس) (و . هـ . م)

مبرهنة (9) : من مستقيم غيرعمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم .



المعطيات : $\overleftrightarrow{AB}$ غيرعمودي على (X)

المطلوب اثباته : ايجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

البرهان :

من نقطة (A) نرسم $(X) \perp \overleftrightarrow{AC}$

(يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\because \overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان فيوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحتويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

$\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ ، $\overleftrightarrow{AC} \subset (Y)$ (بالبرهان)

$\therefore (Y) \perp (X)$ (مبرهنة (8)) (يتعامد المستويان اذا أحتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

ولبرهنة الوحدانية :

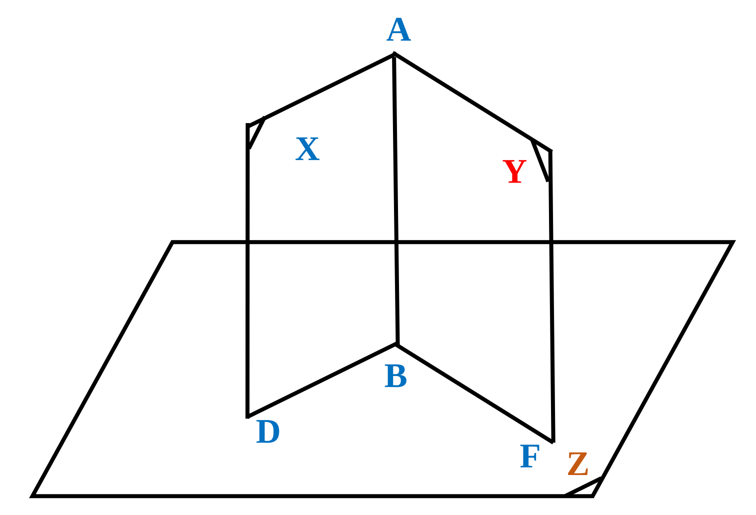
نفرض وجود مستوي آخر (Z) يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ ، $A \in (Z)$ (بالبرهان)

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7)

$(Y) = (Z)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) (و . هـ . م)

نتيجة مبرهنة (9) : اذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديا على مستوٍ ثالث فإن مستقيم تقاطعهما يكون عموديا على المستوي الثالث .



المعطيات : $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$(X) \perp (Z) = \overleftrightarrow{BD}$ ، $(X) \perp (Z)$

$(Y) \perp (Z) = \overleftrightarrow{BF}$ ، $(Y) \perp (Z)$

المطلوب اثباته : $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان : اذا لم يكن $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

لما وجد أكثر مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (Z) (مبرهنة 9)

(من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يمكن رسم مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ (و . هـ . م)

مثال (1) : في ΔABC $BD = 5cm$, $AB = 10\ cm$, $m\sphericalangle A = 30$, $\overline{BD} \perp (ABC)$

جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات : $\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\sphericalangle A = 30°$, $AB = 10\ cm$, $BD = 5cm$

المطلوب اثباته : ايجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

البرهان :

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة)

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\sphericalangle DEB$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره)

ΔDBE القائم الزاوية في B

في ΔBEA القائم الزاوية في E

$$\sin 30 = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5\ cm$$

في ΔDBE قائم الزاوية في B :

$$\tan \sphericalangle DEB = \frac{5}{5} = 1$$

$\therefore$ قياس $m \sphericalangle BED = 45°$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45°$

(قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

(و . هـ . م)

مثال (2) : ليكن ABC مثلثا وليكن $\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$, $\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن أن : $\overline{BE} \perp (CAF)$ ، $\overline{ED} \perp \overline{CF}$

المعطيات :

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$, $\overline{BE} \perp \overline{CA}$, $\overline{AF} \perp (ABC)$

المطلوب اثباته : $\overline{DE} \perp \overline{CF}$, $\overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان :

$\therefore \overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore (CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة (8)) (يتعامد المستويان اذا أحتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

$\because \overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

$\therefore \overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة (7))

(اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عموديا على الاخر)

$\because \overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة) (و . هـ . م)

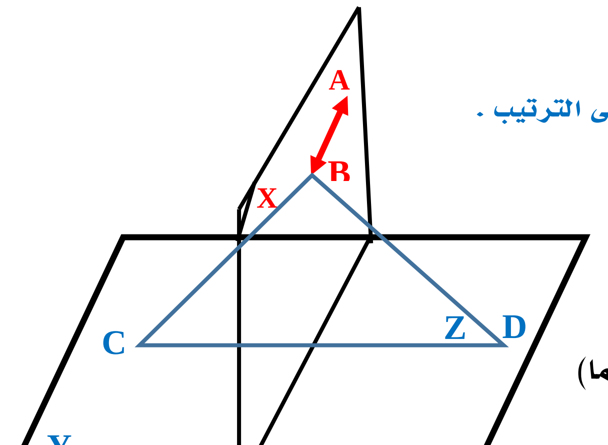
مثال (3) : (Y) , (X) مستويان متعامدان $AB \subset (X)$ (وزاري ٢٠١٢ / د٢)

$\overleftrightarrow{BD} , \overleftrightarrow{BC}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C , D على الترتيب . برهن أن $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات : ان $(X) \perp (Y)$ ، $AB \subset (X)$ ، $\overleftrightarrow{BD} , \overleftrightarrow{BC}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C , D على الترتيب .

المطلوب اثباته : $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان :



ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BD} , \overleftrightarrow{BC}$

(لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستويا وحيدا يحويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC} , \overleftrightarrow{BD}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore (X) \perp (Z)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الاخر)

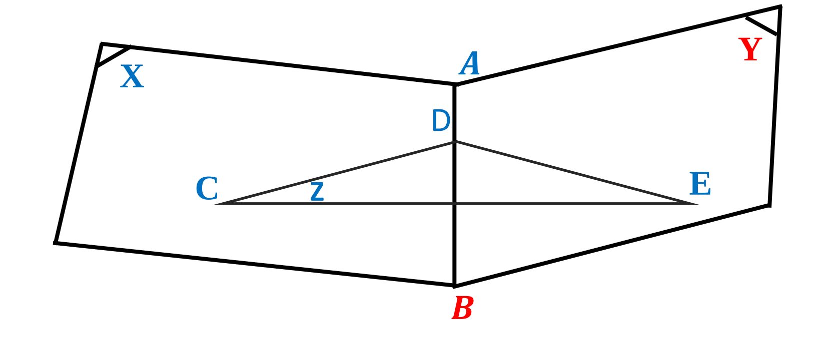
$\therefore (X) \perp (Y)$ (معطى)

ولما كان $\overleftrightarrow{CD} = (Z) \cap (Y)$ (لأنه محتوى في كل منهما)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (اذا كان كل من مستويين متقاطعين على مستو ثالث فإن مستقيم تقاطعهما يكون عموديا على المستوي الثالث) (و . هـ . م)

حل تمارين (1 – 6)

س1 / برهن ان مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عموديا على حرفها . (وزاري ٢٠١٣ /د١)



المعطيات :

الزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

والزاوية المستوية العائدة لها $\measuredangle CDE$

المطلوب اثباته : $\overline{AB} \perp (Z)$

البرهان :

$\because \measuredangle CDE$ زاوية عائدة للزاوية الزوجية $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$ (معطى)

$\begin{cases} \overline{AB} \perp \overline{DC} \\ \overline{AB} \perp \overline{DE} \end{cases}$ (من تعريف الزاوية العائدة لزاوية زوجية)

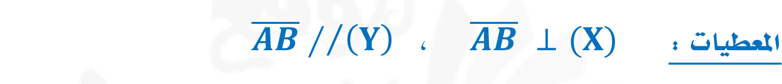
(هي الزاوية الناتجة من اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية)

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين DE ، CD (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

$\therefore \overline{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما)

(و . هـ . م)

س2 / برهن انه اذا وازى مستقيم مستويا وكان عموديا على مستوٍ آخر فإن المستويين متعامدان .



المعطيات : $\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ ، $\overleftrightarrow{AB} // (Y)$

المطلوب اثباته : $(X) \perp (Y)$

البرهان : لتكن $C \subset (Y)$ نرسم $\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد ..)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$AB // CD$ (المستقيمان العموديان على مستوي واحد متوازيان)

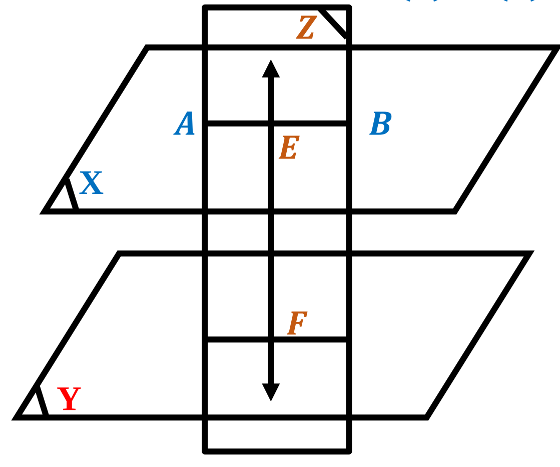
$\therefore C \subset (Y) \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$ (اذا وازى مستقيم مستويا معلوما فالمستقيم المرسوم من اية نقطة من نقط المستوي الموازي للمستقيم المعلوم يكون محتوى فيه)

$\therefore (X) \perp (Y)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم وكان عموديا على الآخر) (و . هـ . م)

س3 / برهن ان المستوي العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر ايضا . وزاري (٢٠١٤/د٢)

المعطيات : $(X) \,//\, (Y)$ ، $(Z) \perp (X)$ ، $(Z) \cap (X) = \overleftrightarrow{AB}$

المطلوب اثباته : $(Z) \perp (Y)$



البرهان :

نرسم $\overleftrightarrow{EF} \subset (Z)$ بحيث $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

$\because (X) \perp (Z)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{EF} \perp (X)$ (اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في أحدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودي على الآخر)

$\because (X) \,//\, (Y)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \perp (Y)$ (المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر ايضا)

$\therefore (X) \perp (Z)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم وكان عموديا على الاخر) (و . هـ . م)

س4 / A, B, C, D اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $AB = AC$ ، $E \in \overline{BC}$ فاذا كانت $\sphericalangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$ برهن $CD = BD$.

المعطيات : A, B, C, D اربع نقاط مختلفة ليست في مستوٍ واحد



$AB = AC$ ، $E \in \overline{BC}$ ، $\sphericalangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$

المطلوب اثباته : $CD = BD$

البرهان :

$AB = AC$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (حسب تعريف الزاوية العائدة)

$\overleftrightarrow{BE} = \overleftrightarrow{CE}$ (العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

$\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (حسب تعريف الزاوية العائدة)

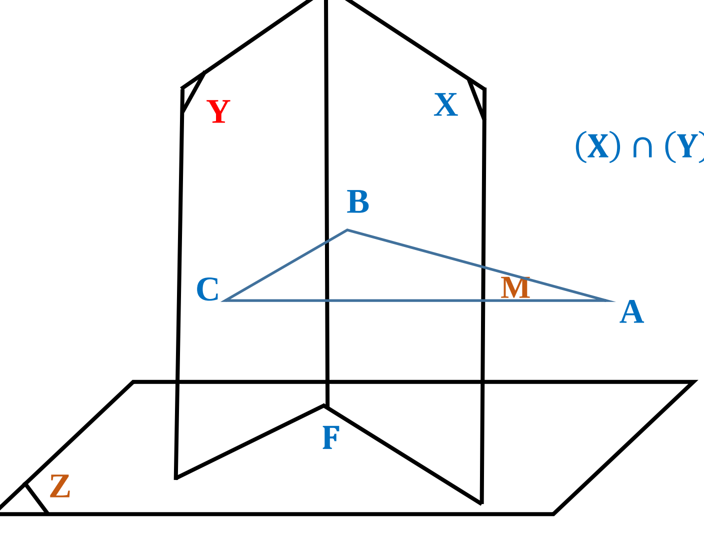
المثلثان DEC , DEB فيهما : $m\sphericalangle DEC = m\sphericalangle DEB$ (قوائم)

ED ضلع مشترك في المثلثين

المثلثان DEC , DEB متطابقان (يتطابق المثلثان بضلعين وزاوية محصورة بينهما)

ومن التطابق ينتج $CD = BD$ (و . هـ . م)

س5 / برهن أنه اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستويا معلوما وكانا عمودين على مستويين متقاطعين فإن مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عموديا على المستوي المعلوم . وزاري (٢٠١٥/د١)



المعطيات : $AB//(Z)$ ، $AC//(Z)$

$(X) \cap (Y) = \overline{EF}$ ، $\overline{AB} \perp (X)$ ، $\overline{AC} \perp (Y)$

المطلوب اثباته : $\overleftrightarrow{EF} \perp (Z)$

البرهان :

$\overline{AB} , \overline{AC} = M$ (لكل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوٍ وحيد يحتويهما)

$\because AB , AC//(Z)$ (معطى)

$\therefore (Z)//(M)$ (اذا كان كل من مستقيمين متقاطعين يوازيان مستويا معلوما فإن مستويهما يوازي المستوي المعلوم)

$\overline{AB} \perp (X)$ (معطى) ، $\overline{AB} \subset M$ (بالبرهان)

$(M) \perp (X)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى أحدهما على مستقيم وكان عموديا على الاخر)

$\overline{AC} \perp (Y)$ (معطى) ، $\overline{AC} \subset M$ (بالبرهان)

$(M) \perp (Y)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى أحدهما على مستقيم وكان عموديا على الاخر)

$\overleftrightarrow{EF} \perp (M)$

(اذا كان كل من مستويين متقاطعين عموديا على مستوٍ ثالث فإن مستقيم تقاطعهما يكون عموديا على المستوي الثالث)

$\overleftrightarrow{EF} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على المستوي الاخر) (و . هـ . م)

س6/ دائرة قطرها $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة برهن ان $(CDB) \perp (CDA)$.

المعطيات : $\overline{AB}$ قطر في دائرة ، $\overline{AC} \perp$ (مستوي الدائرة)

D نقطة تنتمي للدائرة

المطلوب اثباته : $(CDB) \perp (CDA)$

البرهان :

$\because \measuredangle ADB$ زاوية محيطية مرسومة في نصف دائرة قياسها $90°$

(لان قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية)

$\overline{DB} \perp \overline{AD}$(اذا كانت الزاوية بين مستقيمين قائمة فإن المستقيمين متعامدين)

$\overline{AC}$ عمودي على مستوى الدائرة (معطى)

$\overline{DB} \perp \overline{CD}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

اصبح لدينا كلا من $\overline{DB} \perp \overline{CD}, \overline{AD}$ (بالبرهان)

$CDA \perp \overline{DB}$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما)

لكن $\overline{DB} \subset (CDB)$

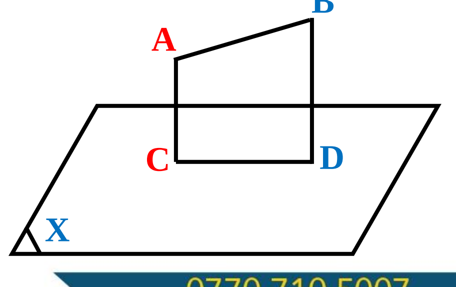
$(CDB) \perp (CDA)$ (كل مستوي مار بمستقيم عمودي على مستوي معلوم يكون عموديا عليه) (و . هـ . م)

الاسقاط العمودي على مستـــو

١) مسقط نقطة على مستوٍ : هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي

٢) مسقط مجموعة نقط على مستوي : لتكن L مجموعة من نقاط في الفراغ فإن مسقطها هو مجموع كل اثار الاعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي .

٣) مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم : هي قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة المستقيمة على المستوي المعلوم .



ليكن $\overline{AB}$ غير عمودي على (X)

وليكن $\overline{AC} \perp$ (X) $\Leftarrow$ مسقط A على (X) هو C

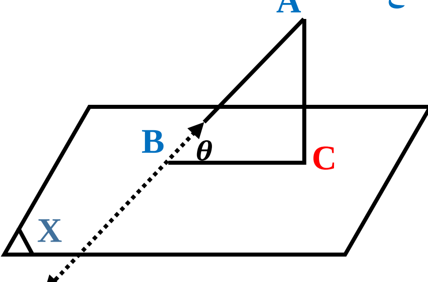
$\overline{BD} \perp (X) \Leftarrow$ مسقط B على (X) هو D

$\therefore$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) هو $\overline{CD}$

ملاحظة : اذا كان $\overline{AB} \,//\, (X)$ فإن $AB = CD$



٤) المستقيم المائل على مستوٍ : هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له .



٥) زاوية الميل : هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي .

ليكن $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على (X) في B وليكن $\overline{AC} \perp (X)$ في C

$\therefore C$ مسقط A على (X) حيث $A \notin (X)$

كذلك B مسقط نفسها حيث $B \in (X)$

$\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) أي ان $0 < \theta < 90°$ ، $\theta \in (0, 90°)$

٦) طول المسقط : طول مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ = طول المائل × جيب تمام زاوية الميل

فعندما تكون $\overline{AB}$ مائلاً على (X) وزاوية ميله θ ومسقطه $\overline{BC}$ فإن $BC = AB \cos\theta$

٧) مسقط مستوي مائل على (X) : زاوية ميل مستوٍ على مستوٍ معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما .

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوٍ معلوم = مساحة المنطقة المائلة × جيب تمام زاوية الميل

لتكن A مساحة المنطقة المائلة ، A' مساحة المسقط و θ قياس زاوية الميل $A' = A \,.\cos\theta$

مثال (4) : اذا وازى أحد ضلعي زاوية قائمة مستويا معلوما فإن مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان .

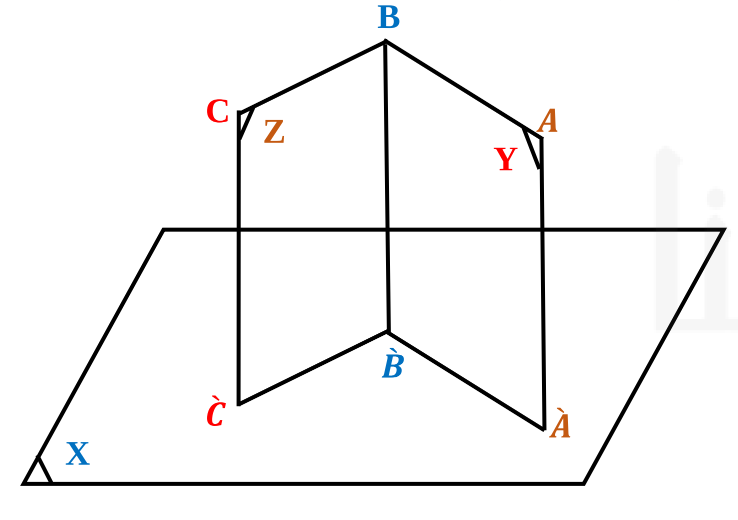
المعطيات : $\measuredangle ABC$ قائمة في B ، $\overline{AB} \,//\, (X)$ (وزاري ٢٠١٣/د٢)



$\overline{\grave{A}\grave{B}}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)



$\overline{\grave{B}\grave{C}}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (X)



المطلوب اثباته : $\overline{\grave{A}\grave{B}} \perp \overline{\grave{B}\grave{C}}$

البرهان :

$\overline{\grave{A}\grave{B}}$ مسقط $\overline{AB}$

$\overline{\grave{B}\grave{C}}$ مسقط $\overline{BC}$ (معطى)

$\Leftarrow (X) \perp \overline{A\grave{A}}, \overline{B\grave{B}}, \overline{C\grave{C}}$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\overline{B\grave{B}} \;//\; \overline{A\grave{A}}$ ، $\overline{B\grave{B}} \;//\; \overline{C\grave{C}}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين $\overline{B\grave{B}}, \overline{C\grave{C}}$ نعين (Z)
بالمستقيمين المتوازيين $\overline{B\grave{B}}, \overline{A\grave{A}}$ نعين (Y)
(لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

لكن $\overline{AB} \;//\; (X)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{\grave{A}\grave{B}} = (Y) \cap (X)$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$\Leftarrow \overline{\grave{A}\grave{B}} \;//\; \overline{AB}$ (إذا وازى مستقيم مستويا معلوما فإنه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم)

كذلك $\overline{\grave{A}\grave{B}} \perp \overline{B\grave{B}}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

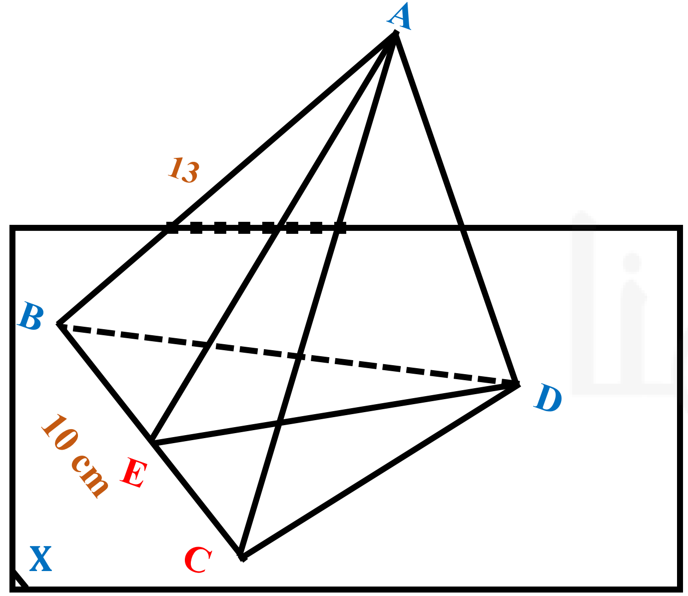
$\overline{B\grave{B}} \perp \overline{AB}$ (في المستوي الواحد : المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر)

لكن $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ (لأن $m\sphericalangle ABC = 90^\circ$ معطى)

$\Leftarrow (Z) \perp \overline{\grave{A}\grave{B}}$ (المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر)

$\therefore \overline{\grave{B}\grave{C}} \perp \overline{\grave{A}\grave{B}}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

مثال (5) : ABC مثلث ، $\overline{BC} \subset (X)$ والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث (ABC) والمستوي (X) قياسها 60° فإذا كان $BC = 10\ cm$ ، $AB = AC = 13\ cm$ جد مسقط المثلث (ABC) على (X) ثم جد مساحة مسقط ΔABC على (X) .



المعطيات : $\Delta ABC , \overline{BC} \subset (X)$

قياس $ABC - \overline{BC} - (X) = 60^\circ$

$AB = AC = 13\ cm$ ، $BC = 10\ cm$

المطلوب اثباته :

ايجاد مسقط ΔABC على (X) وايجاد مساحة مسقط ΔABC على (X) .

البرهان :

نرسم $(X) \perp \overline{AD}$ في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة)

$\therefore$ $\begin{cases} \overline{CD} \text{ مسقط } \overline{AC} \\ \overline{BD} \text{ مسقط } \overline{AB} \\ \overline{BC} \text{ مسقط نفسه على } (X) \end{cases}$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\therefore$ ΔBCD مسقط ΔABC على (X)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على آخر من نقطة معلومة)

$\because$ $AC = AB$ (معطى)

$\therefore$ $EC = BE = 5\ cm$ (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

$\therefore$ $\overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore$ $\sphericalangle DEA$ عائدة للزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60°$ (معطى)

في ΔAEB القائم في E :

$$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\ cm$$

في ΔAED القائم في D :

$$\cos 60° = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6cm$$

مساحة المثلث $BCD = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30\ cm^2$ (و . هـ . م)

ملاحظة : لو طلب مساحة المسقط فقط فيمكن ايجاده كالاتي :

مساحة BCD = مساحة $ABC \times \cos 60°$

$= \frac{1}{2} \times \left(12 \times 10 \times \frac{1}{2}\right) = 30\ cm^2$ (و . هـ . م)

ملاحظة : كل سؤال يعطي فيه زاوية زوجية علينا اتباع الآتي :

١) معرفة مستقيم تقاطع المستويين الذي هو حرف الزاوية الزوجية .

٢) نرسم عمود على حرف الزاوية الزوجية والعمود الاخر نستنتجه من مبرهنة الاعمدة الثلاث

حل تمارين (2 – 6)

س1 / برهن ان طول قطعة المستقيم الموازي لمستوٍ معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه .

(وزاري ٢٠١١/د١ / ٢٠١٤/د١ / ٢٠١٦/د١ ٢٠١٨/د١)



المعطيات : $\overline{AB} \parallel (X)$ ، $\overline{A'B'}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

المطلوب اثباته :

١) $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$

٢) $AB = A'B'$

البرهان :

$\because \overline{A'B'}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) (معطى)

$\therefore \overline{AA'} \perp (X)$, $\overline{BB'} \perp (X)$ (حسب تعريف مسقط قطعة مستقيم)

$\therefore \overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

ليكن (Y) مستوي المستقيمين المتوازيين AA' , BB' (لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستو وحيد يحتويهما)

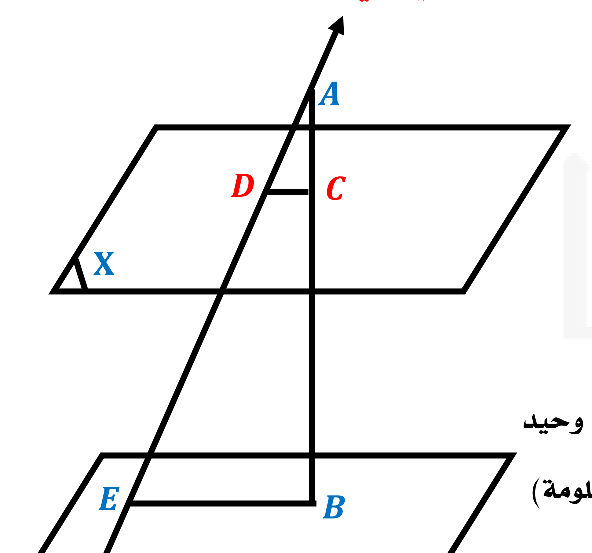
$\because \overline{AB} \parallel (X)$ (معطى)

$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ (مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في احدهما ويوازي الآخر) (و . هـ . م) (١)

$\therefore$ الشكل $ABB'A'$ متوازي اضلاع (يكون الشكل الرباعي متوازي اذا كان فيه كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين)

$\therefore AB = A'B'$ (في متوازي الاضلاع يكون فيه كل ضلعين متقابلين متطابقين) (و . هـ . م) (٢)

س2 / برهن انه اذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فإنه ميله على أحدهما يساوي ميله على الاخر .



المعطيات : $(X) \parallel (Y)$

$\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (X) , (Y) في النقطتين B , C على الترتيب

المطلوب اثباته :

زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) = زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (Y)

البرهان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو معلوم من نقطة معلومة)

$\because (X) \parallel (Y)$ (معطى)

$\therefore \overline{AD} \perp (Y)$ (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر)

$\overleftrightarrow{AE}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ يعينان المستوي Z (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستو وحيد يحتويهما)

$(Y) \cap (Z) = \overleftrightarrow{EB}$ ، $(X) \cap (Z) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويين بمستقيم)

$\overline{CD} // \overline{BE}$ (خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستوٍ ثالث متوازيان)

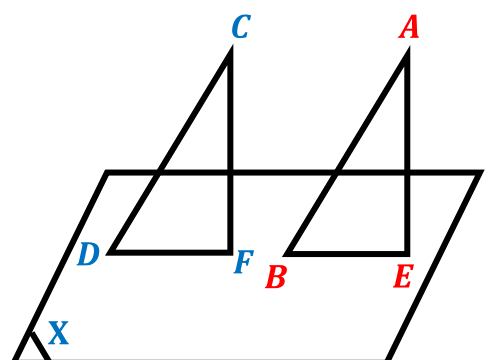
$\measuredangle ACD$ هي زاوية ميل AB على X ، $\measuredangle ABE$ هي زاوية ميل AB على Y

(زاوية الميل هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$\therefore m\measuredangle ABE = m\measuredangle ACD$ (بالتناظر)

$\therefore$ زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (Y) (و . هـ . م)

س3 / برهن على ان للمستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسه . (وزاري ٢٠١١ / د٣) (وزاري ٢٠١٣ / د٣)



المعطيات : $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ وكل منهما مائلان على (X)

المطلوب اثباته :

زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) = زاوية ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (X)

البرهان :

نرسم $\begin{cases} \overleftrightarrow{AE} \perp (X) \\ \overleftrightarrow{CF} \perp (X) \end{cases}$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو من نقطة معلومة)

$\begin{cases} \therefore \overleftrightarrow{EB} \text{ مسقط } \overleftrightarrow{AB} \text{ على } (X) \\ \therefore \overleftrightarrow{FD} \text{ مسقط } \overleftrightarrow{CD} \text{ على } (X) \end{cases}$ (تعريف مسقط قطعة مستقيم على المستوي)

$\Delta\Delta\, AEB , CFD$ قائما الزاوية في E , F على الترتيب

(المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره)

$\therefore \overleftrightarrow{AE} // \overleftrightarrow{CF}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

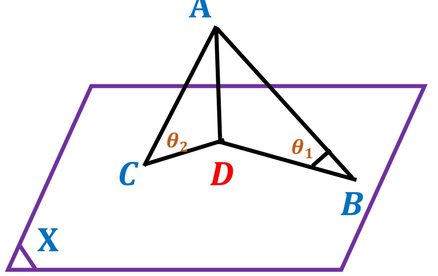
$\because \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$m\measuredangle FCD = m\measuredangle EAB$ (اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما وتوازى مستويهما)

$\therefore m\measuredangle CFD = m\measuredangle AEB = 90°$ (لأنه مثلث قائم الزاوية)

$\therefore m\measuredangle CDF = m\measuredangle ABE$ (مجموع قياسات زوايا المثلث = $180°$) (و . هـ . م)

س4 / برهن على انه اذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم فإن أطولهما زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الاخر عليه .



المعطيات : $AB > AC$ ، $A \notin (X)$

AB, AC مائلان على X

المطلوب اثباته : قياس زاوية B > قياس زاوية C

البرهان : نرسم $(X) \perp \overline{AD}$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

نصل $\overleftrightarrow{DC}, \overleftrightarrow{DB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{DB}$ مسقط $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{DC}$ مسقط $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ هو قطعة المستقيم الواصلة بين أثري العمودين النازلين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\therefore$ $\measuredangle\theta_1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

$\therefore$ $\measuredangle\theta_2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)

(زاوية الميل هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$AD \perp CD$ ، $AD \perp BD$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من اثره)

$\Delta\Delta\, ADB, ADC$ قائما الزاوية في D

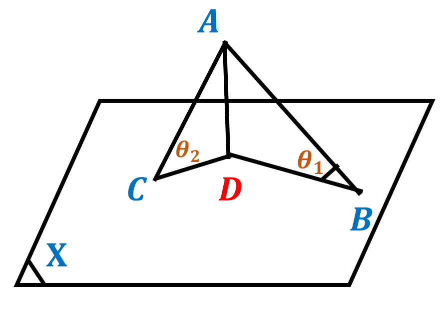
$\because AB > AC$ (معطى)

$$\frac{AB}{AD} > \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC}$$ (خواص التباين)

$$\sin B < \sin C \Rightarrow \measuredangle B < \measuredangle C$$

قياس زاوية B > قياس زاوية C (و . هـ . م)

س5 / برهن على انه اذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستو فإصغرهما ميلاً هو الاطول .



المعطيات : $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ مائلان على (X)

قياس زاوية B > قياس زاوية C

المطلوب اثباته : $AB > AC$

البرهان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

نصل $\overleftrightarrow{DC}, \overleftrightarrow{DB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{DB}$ مسقط $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{DC}$ مسقط $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)

(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ هو قطعة المستقيم الواصلة بين أثري العمودين النازلين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\therefore$ $\sphericalangle\theta_1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X)

$\therefore$ $\sphericalangle\theta_2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X)

(زاوية الميل هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي)

$AD \perp BD$ ، $AD \perp CD$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من اثره)

$\Delta\Delta\, ADB, ADC$ قائما الزاوية في D

$\because$ قياس زاوية B > قياس زاوية C (معطى)

$sin\, B < sin\, C \Rightarrow \sphericalangle B < \sphericalangle C$

$\frac{AD}{AB} < \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AD} > \frac{AC}{AD} \Rightarrow AB > AC$ (خواص التباين) (و . هـ . م)

س6/ برهن ان زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ اصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه وأي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي . (وزاري ٢٠١٢ / د٣)

المعطيات : $\overline{AB}$ مائل على (X) ، $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{BC} \subset (X)$ ، $\sphericalangle ABC$ محددة بـ $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ ، $\sphericalangle ABD$ محددة بـ $\overline{AB}$ و $\overline{BD}$

المطلوب اثباته : $m\sphericalangle ABC < m\sphericalangle ABD$

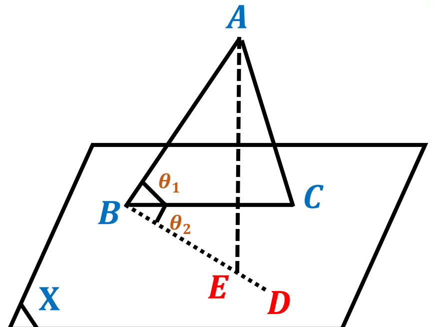
البرهان : لتكن $E \in BD$ بحيث ان $\overline{BC} = \overline{BE}$ ، نصل AE

نرسم $\overline{AC} \perp (X)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\overline{AC} \perp \overline{BC}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من اثره)

$AC < AE$

(العمود النازل من نقطة على مستوي هو أقصر مسافة بين النقطة المعلومة واي نقطة اخرى قع ضمن ذلك المستوي)



AB مشترك ، $AE = BC$ (بالبرهان)

لتكن $\theta_1 = ABC$ ، $\theta_2 = ABE$

$m\measuredangle ABC < m\measuredangle ABE$

(اذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث اخر واختلف الضلعان الاخران فاصغرهما يقابل اصغر الزاويتين) (و . هـ . م)

المجسمات



١- الموشور القائم :

الخواص :

١) احرفه الجانبية متوازية ومتساوية في الطول .

٢) كل وجه جانبي هو مستطيل .

٣) القاعدتين متوازيتين ومتطابقتين .

٢- متوازي المستطيلات : هو موشور قائم قاعدته مستطيلة

٣- المكعب : هو متوازي مستطيلات قاعدته مربعة

٤- الاسطوانة الدائرية القائمة : هي موشور قاعدته دائرة

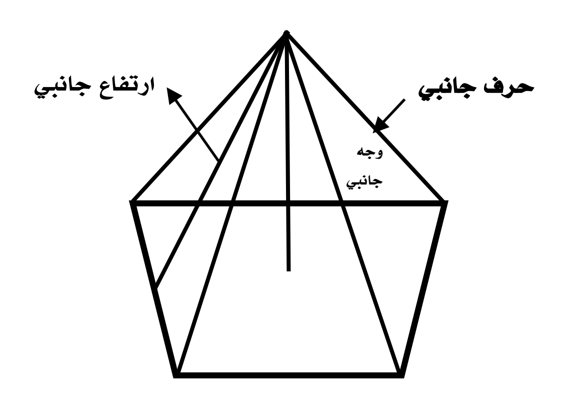
الحجم والمساحة بالنسبة للموشور والاسطوانة

١. الحجم (دائما) = مساحة القاعدة × الارتفاع

٢. المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

٣. المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

٥- الهرم المنتظم :



الخواص :

١) احرفه الجانبية متساوية .

٢) كل وجه جانبي مثلث متساوي الساقين .

٣) كل وجه جانبي له ارتفاع يسمى الارتفاع الجانبي .

٤) ارتفاع الهرم هو العمود النازل من الرأس على القاعدة .

ذو الوجوه الاربعة المنتظم : هو هرم ثلاثي قائم منتظم

الخواص :



١) له اربعة أوجه كل وجه مثلث متساوي الاضلاع ومتطابقة .

٢) له ستة أحرف جانبية متساوية بالطول .

٣) له اربع ارتفاعات متساوية بالطول .

a b c

٦- المخروط الدائري القائم

الخواص : اذا قطع المخروط الدائري بمستوٍ مار من أحد مولداته فإن المقطع هو مثلث متساوي الساقين .

الحجوم والمساحات بالنسبة الى المخروط

١- الحجم : $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

٢- المساحة الجانبية : $L.A = \pi r L$

٣- المساحة الكلية : $T.A = \pi\, r\, L + \pi\, r^2$

٧- الكرة

١) الحجم : $v = \frac{4}{3} r^3 \pi$

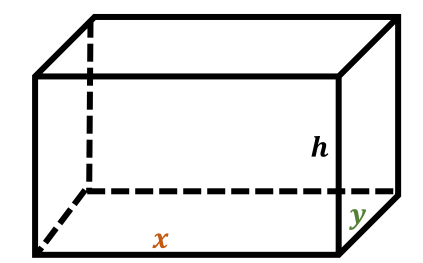
٢) المساحة : $A = 4\, r^2 \pi$

حل تمارين $(3 - 6)$

س1 / اذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات $= 724cm^2$ ومساحة قاعدته $= 132cm^2$ ومساحة أحد أوجهه الجانبية $= 110cm^2$ جد أبعاده وحجمه .



المعطيات : متوازي المستطيلات



مساحته الكلية $= 724cm^2$ ، ومساحة أحد أوجهه الاربعة $= 110cm^2$

ومساحة القاعدة $= 132\ cm^2$

المطلوب اثباته : ايجاد ابعاده وحجمه

البرهان : $x =$ طول قاعدة متوازي المستطيلات $y =$ عرض قاعدته $h =$ ارتفاعه

المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + (2) (مساحة القاعدة)

$$L.A = 2(x+y)(h) + 2\,xy$$

$$[724 = 2\,xh + 2\,yh + 2\,xy] \overset{\div 2}{\Rightarrow} 362 = xh + yh + xy$$

$$\because xy = 132 \quad , \quad \because \ yh = 110$$

$$362 = xh + 110 + 132 \Rightarrow 362 = xh + 242 \Rightarrow xh = 362 - 242 = 120$$

$$xh = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{h} \ldots \ldots (1)$$

$$yh = 110 \Rightarrow y = \frac{110}{h} \ldots \ldots (2)$$

$$xy = 132 \Rightarrow \frac{120}{h} \cdot \frac{110}{h} = 132 \Rightarrow \frac{13200}{h^2} = 132 \Rightarrow 132h^2 = 13200$$

$$h^2 = \frac{13200}{132} = 100 \Rightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10\ cm$$

$$x = \frac{120}{h} = \frac{120}{10} = 12\ cm$$

$$y = \frac{110}{h} = \frac{110}{10} = 11\ cm$$

حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع = $x\ y\ h$

$$v = (12).(11).(10) = 1320\ cm^3$$

س2 / اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $400\pi\ cm^2$ وحجمها $2000\ \pi\ cm^3$ أوجد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها . (وزاري ٢٠١٤ / د٢) (وزاري ٢٠١٥ / د٢)

المعطيات : المساحة الجانبية = $400\pi\ cm^2$ ، الحجم = $2000\ \pi\ cm^3$

المطلوب اثباته : ايجاد : نصف قطر r ، الارتفاع h

البرهان : حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$v = \pi r^2 h$$

$$2000\pi = r^2 \pi\ h \xrightarrow{(\div \pi)} r^2\ h = 2000 \Rightarrow h = \frac{2000}{r^2} \ldots \ldots (1)$$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

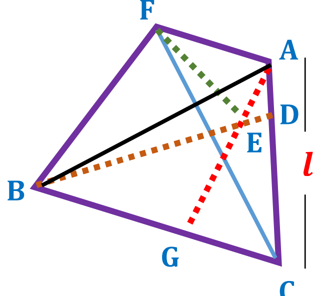
$$L.A = 2r\ \pi\ h$$

$$400\pi = 2r\ \pi\ h \xrightarrow{(\div 2\pi)} 400\pi = 2\pi r \frac{2000}{r^2} \Rightarrow 400 = \frac{4000}{r}$$

$$400\ r = 4000 \Rightarrow r = \frac{4000}{400} = 10cm$$

$$h = \frac{2000}{r^2} \Rightarrow h = \frac{2000}{100} = 20\ cm$$

س3 / برهن على ان حجم ذو الوجوه الاربعة المنتظم والذي طول حرفه $l =$ هو $\frac{\sqrt{2}l^3}{12}$ وحدة مكعبة .



المعطيات : $A - DBC$ ذو الوجوه الاربعة المنتظم طول كل حرف من احرفه $l =$

المطلوب اثباته : $v = \frac{\sqrt{2}\, l^3}{12}$

البرهان : نرسم $DF \perp BC$ ، $AG \perp BC$ وتلتقي في E

(في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة)

AG ينصف زاوية A

DB ينصف زاوية AC (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها وينصف زاوية الرأس)

لتكن E منتصفات الاعمدة (الاعمدة المنصفة لأضلاع مثلث متساوي الساقين تلتقي في نقطة واحدة)

$EF \perp (ABC)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد على مستو معلوم من نقطة معلومة)

$EF \perp EA$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي)

في ΔAED القائم الزاوية في D

$$cos\, 30 = \frac{\frac{1}{2}l}{AE} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2}l}{AE} \Rightarrow AE = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

في $\Delta\ AFE$ القائم الزاوية في E وحسب مبرهنة فيثاغورس

$$l^2 = h^2 + (\frac{l}{\sqrt{3}})^2 \Rightarrow l^2 = h^2 + \frac{l^2}{3} \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{3} \Rightarrow h^2 = \frac{2}{3}\, l^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, l$$

مساحة القاعدة المثلثة متساوية الاضلاع $= \frac{\sqrt{3}}{4}\, l^2$

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

$$\therefore v = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\, l^2\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, l\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}\, l^3$$ وحدة مكعبة

ملاحظة : مساحة قاعدة الهرم = مساحة مثلث متساوي الاضلاع $= \frac{\sqrt{3}}{4}\, l^2$ حيث (l) طول الحرف للهرم .

س4 / مخروط دائري قائم مر برأسه مستو فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة بمقدار $8\ cm$ فإذا كانت مساحة القطع $= 102\ cm^2$ وارتفاعه $= 15\ cm$ (وزاري ٢٠١٥ / د١)

احسب (١) حجمه (٢) مساحته الجانبية (٣) مساحته الكلية

المعطيات : مخروط دائري قائم مركزه E قطعه المستوي ABC بحيث $ED = 8\ cm$ $ED \perp BC$

مساحة المقطع $ABC = 102\ cm^2$ ، ارتفاع المخروط $= 15\ cm$

المطلوب اثباته : ايجاد حجم المخروط ومساحته الجانبية والسطحية

البرهان :

نرسم $AE \perp$ الدائرة ، BC محتوى في الدائرة ، $ED \perp BC$ معطى

$AD \perp BC$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$AE \perp ED$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من اثره)

في المثلث ADE القائم الزاوية في D (المستقيم العمودي على مستوى يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي) .

في المثلث ADE القائم الزاوية في E (وحسب مبرهنة فيثاغورس)

$$(AD)^2 = (AE)^2 + (ED)^2$$
$$(AD)^2 = (15)^2 + (8)^2 = 225 + 64 \Rightarrow (AD)^2 = 289 \Rightarrow AD = 17\ cm$$

مساحة (المقطع) المثلث ABC = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

$$102 = \frac{1}{2} \times BC \times AD \Rightarrow 102 = \frac{1}{2} \times BC \times 17 \Rightarrow BC = 12\ cm$$

في المثلث EDB القائم الزاوية في D (وحسب مبرهنة فيثاغورس)

$$(EB)^2 = (ED)^2 + (BD)^2$$
$$(EB)^2 = 64 + 36 \Rightarrow (EB)^2 = 100 \Rightarrow EB = 10\ cm$$

اي ان نصف قطر قاعدة المخروط $= 10\ cm$

في المثلث AEB القائم الزاوية في E (وحسب مبرهنة فيثاغورس)

$$(AB)^2 = (AE)^2 + (EB)^2$$
$$(AB)^2 = 225 + 100 \Rightarrow (AB)^2 = 325 \Rightarrow AB = 5\sqrt{13}\ cm$$

حيث يمثل الضلع AB طول الحرف الجانبي (المولد) للمخروط

المساحة الجانبية للمخروط = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × طول المولد

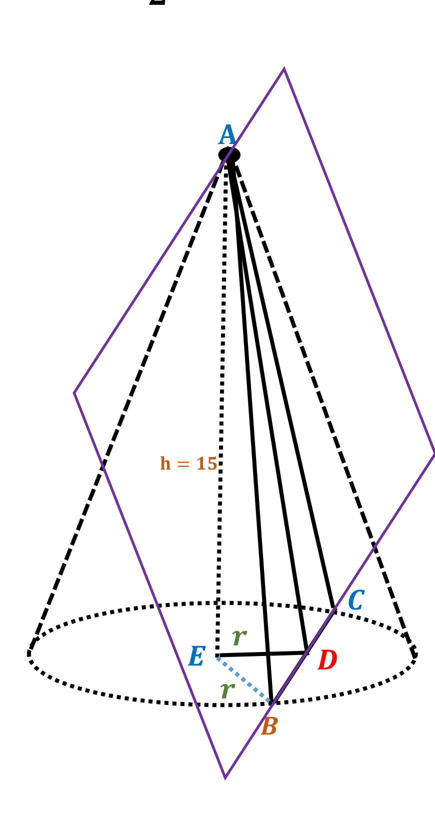
$$L.A = \frac{1}{2}(2)(10)\pi(5\sqrt{13}) = 50\sqrt{13}\,\pi\ cm^2$$

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$T.A = 50\sqrt{13}\pi + (10)^2\pi = 50\pi(\sqrt{13} + 2)\ cm^2$$

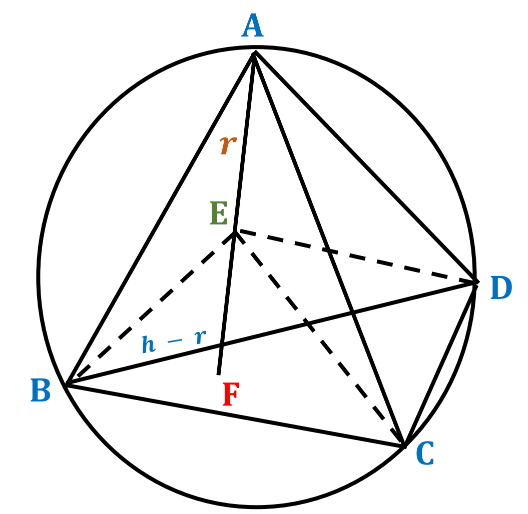
حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$v = \frac{1}{3}(10)^2\pi(15) = 500\pi\ cm^3$$





س5 / اذا علمت أن يمكن رسم كرة خارج ذي الوجوه الاربعة المنتظم برهن أن نصف قطر الكرة $= \frac{3}{4}$ الارتفاع .



المعطيات : $A - BCD$ هرم ذو الوجوه الاربعة مرسوم داخل

دائرة مركزها E ونصف قطرها AE .

رسمت الكرة التي مركزها C خارج ذي الوجوه الاربعة المنتظم

المطلوب اثباته : $AE = \frac{3}{4} AF$

البرهان :

نرسم $AF \perp (BCD)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على

مستو معلوم من نقطة معلومة)

نصل $\overleftrightarrow{EB}, \overleftrightarrow{EC}, \overleftrightarrow{ED}$ اصبحت لدينا الاهرامات التي رؤوسها (E) وقواعدها المتساوية بالمساحة هي :

$(ABD), (ABC), (ACD), (BCD)$ (الوجوه الاربعة في ذي الوجوه الاربعة تكون متساوية)

قسم الهرم الاصلي الى اربعة اهرامات من ذي الوجوه الاربعة متساوية بالحجم وهي :

$(E - ABD), (E - ABC), (E - ACD), (E - BCD)$

(يتساوى حجما شكلين اذا تطابقت قاعدتيهما وتساوي ارتفاعها)

حجم الهرم الاصلي $= 4 \times$ حجم الهرم الصغير

حجم الهرم الكبير $= 4 \times E - BCD$

$$\frac{1}{3}(BCD)(AF) = 4\left(\frac{1}{3}\right)(BCD)(EF)$$

$$AF = 4\,(EF)$$

$$AF = 4\,(AF - AE)$$

$$AF = 4AF - 4AE$$

$$4AE = 3AF \Rightarrow AE = \frac{3}{4}\,AF$$

تم بحمد الله